

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи
УДК 530.12:531.51

АБДУЖАББАРОВ АХМАДЖОН АДИЛЖАНОВИЧ

ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В СТАЦИОНАРНЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность: 01.03.02 - Астрофизика, радиоастрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Б.Ж. Ахмедов

Ташкент – 2009

Оглавление

Введение	5
ГЛАВА 1. Электромагнитное поле и движение частиц в окрестности вращающихся компактных гравитирующих объектов с гравитомагнитным зарядом	22
1.1 Введение	22
1.2 Керр-НУТ компактный объект в однородном магнитном поле	24
1.3 Движение заряженных частиц	28
1.4 Нестабильные круговые орбиты	30
1.5 Движение заряженных частиц в поле токопроводящей петли, расположенной вблизи Керр-НУТ компактного объекта	34
1.6 Внешнее электромагнитное поле медленно вращающейся звезды для магнитного поля со специальной монополярной конфигурацией	38
1.7 Заключение	40
ГЛАВА 2. Движение частиц и электромагнитные поля в пространстве-времени компактных объектов с экзотическими уравнениями состояния	42
2.1 Введение	42
2.2 Потенциал электромагнитного поля вокруг КН	44
2.3 Движение заряженных частиц вокруг медленно вращающейся намагниченной кротовой норы	46
2.4 Стабильные круговые орбиты заряженных частиц	51

2.5	Электромагнитное поле медленно вращающегося намагниченного гравастара	54
2.6	Выводы	57

ГЛАВА 3. Электромагнитные поля и движение частиц вокруг вращающихся намагниченных компактных объектов на бранах **59**

3.1	Введение	59
3.2	Метрика пространства-времени медленно вращающейся сферической звезды на бранах	62
3.3	Стационарные решения уравнений Максвелла	63
3.4	Астрофизические приложения к радиоизлучению пульсаров	71
3.5	Вращающаяся ЧД на бранах в однородном магнитном поле	75
3.6	Движение заряженной частицы вокруг вращающейся черной дыры на бранах	76
3.7	Движение пробной частицы вокруг ЧД на бранах	78
3.8	Заключение	85

ГЛАВА 4. Эволюция бессиловой магнитосферы вокруг медленно вращающегося компактного объекта **90**

4.1	Введение	90
4.2	Пространственная эволюция бессиловой магнитосферы	92
4.3	Механизм Блэндфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ	100
4.4	Эффект Пенроуза в гравитационном поле компактного объекта с гравитомагнитным монопольным зарядом	103
4.5	Заключение	104

Основные результаты и заключение **105**

Литература	107
-----------------------------	------------

Список сокращений

ОТО – общая теория относительности

ЧД – черная дыра

КН – кротовая нора

ПKN – проходимые кротовые норы

НЗ – нейтронная звезда

ИСО – инерциальная система отсчета

СКО – стабильные круговые орбиты

НУТ – Ньюман-Унти-Тамбурино

ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение

ННУМ – наблюдателем с нулевым угловым моментом

УС – уравнение состояния

Введение

Актуальность. Современная теория тяготения, сформулированная в 1915 г. Альбертом Эйнштейном и называемая общей теорией относительности (ОТО) долгое время оставалась математизированной теорией имеющей малое практическое применение в астрофизике в основном из-за слабости гравитационных полей в рамках солнечной системы. До 60-х годов прошлого столетия ОТО давала лишь малые поправки, доступные измерению только точнейшим прецизионным приборам. Правда ради справедливости нужно отметить, что в начале 20-х годов XX-столетия А.А. Фридман предсказал расширение Вселенной (к 1928 году космологическое расширение Вселенной было экспериментально подтверждено Э.П. Хабблом на основании большого наблюдательного материала спектра излучения от удаленных галактик).

Однако, современные достижения экспериментальной техники сделали возможным и необходимым учитывать влияние общерелятивистских эффектов на результаты многих повседневных астрономических наблюдений, связанных, например, с наблюдениями компактных массивных астрономических объектов (галактических и внегалактических) с сильными гравитационными и электромагнитными полями, играющих роль уникальных астрофизических лабораторий. Поэтому исследование влияния риманова характера геометрии вблизи компактных объектов на результаты астрономических наблюдений является актуальным. При современных точностях измерений астрономия становится релятивистской, а ОТО - рабочим инструментом астрономии, а именно практически значимой важной теорией описывающей релятивистские астрофизические процессы.

В частности, к сильному изменению облика релятивистской астрофизики и космологии привели открытия, произведенные в 60-70-е годы XX-столетия. Это прежде всего - открытие микроволнового космологического излучения

и являющееся веским доказательством в пользу "горячей модели Вселенной предложенной Гамовым еще в 1948 г., а также открытие пульсаров Д. Беллом и Э. Хьюишом 1968 г., которые представляют собой быстро вращающиеся сильно намагниченные компактные нейтронные звезды (НЗ).

В 70 -80-е годы XX-столетия вырос интерес работам, где рассматривались вопросы о физике черных дыр (ЧД) и гравитационных волн. В настоящее время имеются многочисленные доказательства существования массивных ЧД в центре многих галактик. Кроме того, существуют доказательства наличия ЧД в центре аккреционных дисков. Главным доказательством является наличие излучений от этих объектов в радио-, оптическом и рентгеновском диапазонах. Наличие релятивистских объектов как ЧД в звездных системах требуют особого подхода к исследованию эволюционных процессов в них и к их моделированию. При этом очень важен комплексный подход к данному вопросу, заключающийся в использовании как наблюдательных данных в оптическом диапазоне, с дальнейшим построением моделей динамической эволюции, так и данных в других диапазонах, с дальнейшим моделированием физических процессов в электромагнитных полях, поскольку электромагнитные явления играют исключительно важную роль в астрофизических задачах, например, в окрестности сверхмассивных гравитационных объектов, в межгалактическом пространстве, в современных моделях активных галактических ядер и в формировании внегалактических потоков вещества. Особую актуальность придает им тот факт, что современные астрономические наблюдения основаны на регистрации электромагнитных сигналов астрономического происхождения в широком спектральном диапазоне, а влияние искривленного пространства-времени на электромагнитные поля имеет фундаментальный интерес, который возрастает, когда эти эффекты могут быть связаны с богатой наблюдательной феноменологией.

Наличие сильных электромагнитных полей считается одной из наиболее важных особенностей вращающихся НЗ, наблюдаемых как пульсары и магнитары. С другой стороны было показано, что электрически нейтральные ЧД

не могут иметь собственного магнитного поля [13]¹. Однако, предположив, что ЧД расположена во внешнем однородном магнитном поле, создаваемом находящимся вблизи источником, таким как соседняя НЗ или магнитар, было получено точное решение вакуумных уравнений Максвелла для асимптотически однородного магнитного поля [14]. После этого свойства ЧД во внешнем магнитном поле были подробно изучены разными авторами с целью изучения вопроса об извлечении энергии ЧД, в частности через эффект Блэндфорда-Знаека [15, 16, 17, 18, 19] и [20].

Решение Керр-Тауб-НУТ

Решение Керра, которое описывает аксиально-симметричное пространства-времени вокруг вращающегося компактного объекта [21] в ОТО можно обобщить на более общий случай путем введения дополнительного нетривиального параметра, так называемого гравитомагнитного монополярного момента или "магнитной массы". Окончательное решение описывает пространство-время локализованных стационарно аксиально - симметричных объектов и называется Керр - Тауб - НУТ (Ньюман - Унти - Тамбурино) решение вакуумных уравнений поля Эйнштейна [22]. Это решение относится к общему классу метрик, которые допускают разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и содержат три физических параметра: гравитационная масса (гравитоэлектрический заряд), гравитомагнитная масса (НУТ заряд), а также параметр вращения [23]. Присутствие НУТ заряда в пространстве-времени разрушает его асимптотическую структуру, что делает его в отличие от пространства-времени Керра, асимптотически неплоским. Несмотря на то, что пространство-время Керр-Тауб-НУТ не имеет сингулярности кривизны, оно обладает конической сингулярностью на своей оси симметрии, что приводит к гравитомагнитному аналогу условия квантования струн Дирака. Конические сингулярности могут быть устранены путем введения соответствующего условия периодичности на временную координату.

Однако, появление замкнутых временноподобных кривых в данном про-

¹Ссылки во введении начинаются с [13], так как литература начинается с ссылок [1]–[12] на работы соискателя

странстве - времени, делает ее трудно интерпретируемым решением нормальной ЧД. В рамках альтернативного объяснения конических сингулярностей можно рассматривать их как источник физических струн связывающих пространство-время вдоль оси симметрии. Несмотря на эти нежелательные особенности решения Керра-Тауб-НУТ оно по прежнему выступает в качестве привлекательного примера пространства-времени с асимптотически неплоской структурой для изучения различных астрофизических явлений в ОТО.

В пространстве-времени, содержащем НУТ заряд, также играет важную роль в низкоэнергетической теории струн, где существующие дуальные симметрии эффективных действий позволяют построить новые стационарные решения типа Тауб-НУТ. Некоторые примеры гравитирующих решений с НУТ зарядом были найдены в теории Эйнштейна-Янга-Миллса.

Несмотря на отсутствие наблюдений, свидетельствующих о существовании гравитомагнитного монополярного момента, то есть пространства-времени называемого НУТ пространством (Ньюман, Унти и Тамбурино), в настоящее время представляет интерес изучение электромагнитных полей и движения частиц в НУТ пространстве с целью получения нового инструмента для изучения важных общерелятивистских эффектов, которые связаны с недиагональными компонентами метрического тензора и не имеют ньютоновских аналогов. Исследование электромагнитных процессов в окрестности Керр-Тауб-НУТ компактного гравитационного объекта обусловлено тем, что эффекты ОТО в метрике Керр-Тауб-НУТ могут дать возможность экспериментального обнаружения гравитационного монополярного момента. Более того общерелятивистский эффект увлечения инерциальных систем отсчета (ИСО) является очень важным в магнитосфере пульсаров и считается источником дополнительного электрического поля общерелятивистского происхождения.

Следующий этап развития теории гравитации связан в первую очередь с неожиданным открытием в 1997 году ускоренного расширения Вселенной. Дальнейшие открытия в релятивистской астрономии и космологии (открытие массивных ЧД в центре галактик, темной материи, темной энергии, магнито-

ров, аномальных рентгеновских пульсаров и т.д.) подтолкнули исследователей в области ОТО к поиску альтернативных моделей теории гравитации и адекватных теоретических объяснений эффектам связанным с этими новыми революционными открытиями (см., например, [24, 25]).

Современные космологические данные свидетельствуют о существовании новых типов частиц, еще не открытых в земных условиях и составляющих "темную материю" во Вселенной.

Еще более удивительным результатом современной наблюдательной космологии стало указание на существование совершенно новой формы материи - "темной энергии" с экзотическим уравнением состояния $p/\varepsilon = -\epsilon$, p - давление, ε - плотность вещества, ϵ - положительное число. Доля обычного вещества (протонов, атомных ядер, электронов) в суммарной энергии в современной Вселенной составляет всего 5%. Помимо обычного вещества во Вселенной имеются и реликтовые нейтрино, вклад которых в полную энергию (массу) во Вселенной невелик, поскольку массы нейтрино малы, и составляет заведомо не более 3%. Оставшиеся 90 – 95% (25% – темное вещество, 60 – 75% – темная энергия) полной энергии во Вселенной – "неизвестно что".

Кротовые норы

В последнее время в связи с открытием новых форм материи во Вселенной в релятивистской астрофизике усилился интерес к гравитационным объектам содержащим темную энергию или темное вещество, в частности к работам, в которых обсуждаются решения уравнений Эйнштейна, описывающие проходимые кротовые норы (ПКН) [26, 27]. Этот интерес также вызван, в частности, строительством и проектированием высокоточных радиоинтерферометров, которые позволят в будущем отличать ПКН от других объектов (ЧД, например). Принципиальным и характерным свойством ПКН является ее горловина, через которую могут проходить физические тела. Пространство-время около горловины сильно искривлено. Эта кривизна достигает величины, соответствующей горизонту событий ЧД с такой же массой.

В последнее время проблема кротовых нор (КН) в ОТО обсуждалась во многих работах [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Эта проблема актуальна как для теоретической физики, так и для астрофизики. КН это гипотетический объект, описываемый несингулярным решением уравнений Эйнштейна с двумя большими (или бесконечными) областями пространства - времени, связанными горловиной. Рассматриваемые две большие области пространства - времени могут лежать в одной и той же Вселенной или даже принадлежать разным вселенным в модели Мультивселенной. В последнем случае "проходимые" КН представляют уникальную возможность исследовать другие Вселенные.

Первичные пространственно-временные тоннели (КН), вероятно, существуют в исходном скалярном поле, они возможно сохраняются после эпохи инфляции, связывают различные районы нашей и других вселенных, открывая уникальную возможность исследования многоэлементной Вселенной и обнаружения нового типа объектов - входов в тоннели. При этом уже давно было доказано, что в рамках эйнштейновской теории гравитации (ОТО) мосты могут быть построены из материи только с экзотическим уравнением состояния.

В литературе рассмотрены модели, где основным материалом для КН, обладающим всеми необходимыми свойствами, является пронизывающее ее сильное магнитное поле, а фантомная материя или фантомная энергия нужны только в виде малой добавки, и, наоборот, модели, где основным материалом является фантомная энергия с уравнением состояния, близким к вакуумному ($p/\varepsilon = -1$), и добавкой плотности энергии магнитного поля [27]. При этом некоторые из наблюдаемых астрономических объектов могут оказаться входами в тоннели.

Гравастар – звезда из темной энергии

Недавнее открытие ускорения Вселенной положило начало дискуссии о существовании темной энергии (см., например, [33, 34, 35, 36]) и, в свою очередь, исследованиям альтернативных конфигураций, что привело к нахождению решения для так называемого гравастара, гравитационной вакуумной звезды, состоящей из темной энергии (см. [37, 38]). Это сферически симмет-

ричное статичное глобальное решение уравнений Эйнштейна является кандидатом на описание весьма компактных астрофизических объектов. И в этом смысле, будучи альтернативой ЧД, оно получается из сегмента геометрии де-Ситтера в центре с уравнением состояния темной энергии, проходит через тонкий вакуумный переходный слой, избегая формирования горизонта событий, и соответствует внешнему пространству Шварцшильда. Общим из условий реализации гравастара является анизотропность давления во внешней оболочке объекта (см. [39, 40, 41]).

Несколько астрофизических аспектов решения для гравастара, таких как термодинамические свойства, моды квазинормальных колебаний и нестабильность эргорегиона, недавно обсуждались в литературе [42], а также Киренти и Рецолла [43, 44] исследовали стабильность модели Мазур и Мотолла при аксиальных возмущениях и обнаружили, что гравастары устойчивы к таким возмущениям. Киренти и Рецолла также показали, что их квазинормальные моды отличаются от мод ЧД с той же массой и, таким образом, могут быть использованы для различения гравастаров и ЧД.

Общерелятивистская теория наблюдаемых применительно к макроскопической электродинамике приводит к эффектам, которые могут быть реализованы на практике или обнаружены в астрономических наблюдениях. Кроме того, они представляют и чисто теоретический интерес для развития классической электродинамики в рамках ОТО. Однако за последние годы внимание большинства исследователей в теоретическом изучении электродинамики релятивистских компактных объектов было поглощено ЧД. На наш взгляд, общерелятивистская электродинамика релятивистских объектов из звездного вещества - НЗ, КН, гравастар представляет не меньший интерес, поскольку связь между эффектами ОТО и электромагнитными полями исключительно важна в окрестности релятивистских звезд, являющихся сугубо общерелятивистскими компактными объектами, поскольку период их вращения варьируется от миллисекунд до нескольких секунд, магнитное поле порядка 10^{12} Гс, радиус порядка 10 км и центральные плотности вещества порядка 10^{14} г/см³, что свидетельствует о сильном гравитационном поле вблизи поверхно-

сти этих объектов.

И наконец, важной и актуальной проблемой в настоящее время является экспериментальная проверка современной теории гравитации. Проведенные классические гравитационные эксперименты не коснулись основного свойства гравитационного поля, предсказываемого ОТО, - его тензорности. Такие знаменитые эффекты как красное смещение, отклонение луча света гравитационном полем (Солнца), прецессия перигелия Меркурия, запаздывание радарного эха, описываются диагональными членами метрического тензора и подтверждают наличие малых общерелятивистских поправок к ньютоновским гравитационным эффектам. Исследования астрофизических процессов в окрестности компактных намагниченных гравитационных объектов, являющихся общерелятивистскими космическими лабораториями позволяют и будут позволять проводить дальнейшую проверку основных фундаментальных положений ОТО.

Гравитационные объекты в рамках модели на бранах

Недавно полученные точные решения для внешнего гравитационного поля релятивистских звезд на бранах (см. для обзора [45, 46, 47, 48, 49, 50]) создали интерес к изучению эффекта напряженности брана на различные астрофизические процессы, например к изучению гравитационных линз [51, 52, 53], к движению пробных частиц [54], а также к изучению заряженных вращающихся ЧД [55]. Недавно были изучены поправки брана на возмущение электромагнитных потенциалов вокруг ЧД [56].

Насколько нам известно, эффект напряженности брана на конфигурации магнитного поля вращающихся релятивистских компактных звезд еще не изучены. Поскольку магнитное поле определяет многое из феноменологических наблюдений компактных звезд, исследование последствия эффектов брана на звездные магнитные поля является актуальной задачей. Ранее были изучены бран-корректировки для заряженных вращающихся ЧД и возмущения электромагнитного потенциала вокруг ЧД. Задача об исследовании электромагнитного поля и движение частиц вокруг вращающихся ЧД на бранах,

находящихся в асимптотически однородном магнитном поле до сих пор остается не решенным. Изучение орбит пробных частиц может обеспечить возможность для сдерживания параметра в решении, и более глубокое понимание физической природы и свойств соответствующей метрики пространства. Таким образом, это может открыть возможность тестирования бран модели с помощью астрономических и астрофизических наблюдений вокруг ЧД, в частности наблюдательно измеряемый радиус стабильного кругового орбиты пробных частиц вокруг ЧД, в принципе, может дать определенные лимиты для численного значения бран заряда.

Актуальность исследования звездных систем с сильно намагниченными компактными объектами – магнитарами стала мотивом их наблюдений как во многих крупных обсерваториях, так и в частности в Астрономическом институте АН РУз с помощью VLF антенны, предоставленной Стэнфордским университетом. На этой антенне в настоящее время производятся измерения возмущения D – слоя ионосферы за счет мощных гамма вспышек от магнитаров. В теоретическом плане методами исследования в диссертации являются математический аппарат ОТО и аффинной дифференциальной геометрии, включая Риманову геометрию. Для анализа и решения уравнений поля применяются аналитические и численные методы вычисления Mathematica и Fortran на компьютерах IBM PC Pentium - IV и рабочих станциях. Исследуются уравнения динамики для гравитирующих систем и уравнения макроскопической электродинамики для моделей астрофизических объектов (НЗ и плотных компактных конфигураций). В этой связи в диссертации исследованы в рамках ОТО уравнения макроскопической электродинамики для моделей намагниченных астрофизических объектов, обладающих ненулевым магнитным моментом, когда параметры объектов существенно значимы для учета общерелятивистских эффектов. Полученные аналитические решения уравнений Максвелла в внутренней и внешней метриках вращающейся намагниченной релятивистской звезды указывают на исключительно важную роль эффектов ОТО внутри и в ближайшей окрестности намагниченных НЗ. В последние годы рядом авторов была развита электродинамика релятивист-

ских звезд в искривленном пространстве и в результате интенсивных исследований было показано, что эффекты ОТО имеют исключительно важное влияние на электромагнитные поля НЗ в метрике вращающегося гравитационного объекта. В рамках данной диссертации результаты этих исследований по вращающимся НЗ расширены на электродинамику компактных объектов на бранах, звезд из новых форм материи и гравитационных объектов с гравитомагнитным зарядом.

Степень изученности проблемы. В настоящее время представляет интерес изучение электромагнитных полей и движения частиц в Керр-Тауб-НУТ пространстве с целью получения нового инструмента для изучения важных общерелятивистских эффектов, которые связаны с недиагональными компонентами метрического тензора и не имеют ньютоновских аналогов. Исследование электромагнитных процессов в окрестности Керр-Тауб-НУТ компактного гравитационного объекта обусловлено тем, что эффекты ОТО в метрике Керр-Тауб-НУТ могут дать возможность экспериментального обнаружения гравитационного монополярного момента, общерелятивистский эффект увлечения инерциальных систем отсчета (ИСО), поскольку наличие сильных электромагнитных полей считается одной из наиболее важных особенностей вращающихся НЗ, наблюдаемых как пульсары и магнитары.

Хотя в литературе исследована возможность существования круговых орбит вокруг КН, влияние форм параметра и собственного электромагнитного поля на движения заряженных частиц остаются неизученным. Несмотря на то, что несколько астрофизических аспектов решения для гравастара, таких как термодинамические свойства, моды квазинормальных колебаний и неустойчивость эргорегиона, обсуждались в литературах, электромагнитное поле внутри гравастара остается малоизученным.

Эффект напряженности брана на конфигурацию магнитного поля вращающихся релятивистских компактных звезд еще не изучен. Поскольку магнитное поле определяет феноменологию наблюдений компактных звезд, исследование напряженности брана на звездные магнитные поля является актуальной задачей. Задача об исследовании электромагнитного поля и движение

частиц вокруг вращающихся ЧД на бранах, находящихся в асимптотически однородном магнитном поле до сих пор остается не решенной. Изучение орбит пробных частиц может обеспечить определения характеристик, физической природы и свойств соответствующей метрики пространства-времени. Одним из неизученных вопросов является вопрос об устойчивости бессиловой магнитосферы вращающейся ЧД, помещенной во внешнее магнитное поле, который ответствен за эффективность механизма Блэндфорда-Знаека.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является изучение электромагнитных полей и движения пробных частиц в пространстве-времени а) Керр-Тауб-НУТ, б) вращающейся намагниченной КН, в) в оболочке гравитационной вакуумной звезды из темной энергии, г) ЧД на бранах во внешнем однородном магнитном поле; получить точные аналитические решения для зависимости радиуса стабильной круговой орбиты (СКО) от бран параметра для движения пробной частицы вокруг ЧД на бранах; исследование влияния спина и гравитомагнитного момента ЧД на процессы извлечения энергии вращающейся ЧД.

Постановка задачи.

– Получить аналитические и численные результаты для звездного магнитного поля для рассматриваемых различных моделей аксиально-симметричных гравитационных объектов.

– Найти основные уравнения Максвелла в пространстве-времени сферических компактных объектов на бране. Анализ внутреннего магнитного поля для различных уравнений состояния внутри разных намагниченных гравитационных объектов. Найти точные аналитические внутренние решения уравнений Максвелла и Эйнштейна для звездного вещества с жестким уравнением состояния.

– Проинтегрировать внешние уравнения Максвелла из асимптотической бесконечности до поверхности звезды и найти численное решение для магнитного поля вне звезды на бранах. Численно проинтегрировать уравнения для магнитного поля внутри релятивистских звезд.

– В качестве астрофизических применений полученных результатов найти

изменение мощности электромагнитного магнитодипольного излучения вращающейся звезды из-за эффекта брана.

– Рассмотреть движение заряженных частиц в окрестности а) Керр-Тауб-НУТ объекта, б) КН, в) компактных объектов на бране помещенной во внешнее однородное магнитное поле.

– Исследовать электромагнитные поля вращающейся намагниченной звезды на бранах с различными конфигурациями магнитного поля.

– Исследовать устойчивость бессиловой магнитосферы вращающейся ЧД, помещенной во внешнее магнитное поле.

– Проанализировать итоговые результаты исследований, сопоставить их с аналогичными результатами зарубежных авторов.

Научная новизна определяется тем, что в диссертации впервые: найдены точные аналитические решения для электромагнитного поля а) в пространстве - времени Керр-Тауб-НУТ, б) вращающейся намагниченной НЗ с гравитомагнитным зарядом. Впервые показано, что влияние магнитного поля является доминирующим по сравнению с НУТ параметром на движение заряженных частиц в пространстве Керр-Тауб-НУТ. Показано, что НУТ параметр существенно усиливает процессы Блэндфорда-Знаека и Пенроуза по извлечению энергии ЧД. Впервые найдено точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве - времени вращающейся намагниченной КН. Впервые установлена сильная зависимость движения частиц от форм параметра КН и магнитного поля. Впервые найдены аналитические выражения для компонент внутреннего дипольного магнитного поля гравастара. Впервые найдено внутреннее магнитное поле в намагниченной релятивистской звезде на бране. Впервые получено оригинальное точное решение для нижней границы внутренней СКО пробной частицы в окрестности ЧД на бране. Из астрофизических наблюдений аккреционных дисков ЧД получен верхний предел для бран параметра. Показано, что плазменная магнитосфера в окрестности вращающейся ЧД является устойчивой, что подтверждает эффективность процесса Блэндфорда-Знаека по извлечению энергии ЧД.

Научная значимость и практическая ценность состоит в том, что

полученные результаты могут играть важную роль в обнаружении и исследовании монополярного гравитомангнитного заряда, существование которого теоретически предсказано в рамках ОТО, но до сих пор не обнаружено. Полученные теоретические данные также могут быть сравнены с экспериментальными наблюдательными данными о существовании и отличии КН от кандидатов в ЧД. Полученное выражение магнитного поля гравастара может быть полезной для описания различных электромагнитных процессов в гравастаре. Данные позволяют получить верхний предел на величину бран параметра из данных по наблюдению аккреции вещества на вращающуюся ЧД.

На защиту выносятся следующие основные результаты

1. Точные аналитические решения для электромагнитного поля а) в пространстве - времени Керр-Тауб-НУТ, б) вращающейся намагниченной НЗ с гравитомангнитным зарядом. Влияние магнитного поля доминирует по сравнению с НУТ параметром на движение заряженных частиц в пространстве Керр-Тауб-НУТ. Показано, что НУТ параметр существенно усиливает процессы Блэндфорда-Знаека и Пенроуза по извлечению энергии ЧД.
2. Точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве - времени вращающейся намагниченной КН. Установленная сильная зависимость движения частиц от форм параметра КН и магнитного поля. Аналитические выражения для компонент внутреннего дипольного магнитного поля гравастара.
3. Внутреннее магнитное поле в намагниченной релятивистской звезде на бране. Оригинальное точное решение для значения нижней границы внутренней СКО пробной частицы в окрестности ЧД на бране. Верхний предел для бран параметра из астрофизических наблюдений аккреционных дисков ЧД.
4. Доказана устойчивость плазменной магнитосферы в окрестности вращающейся ЧД во внешнем магнитном поле, что подтверждает эффективность процесса Блэндфорда-Знаека по извлечению энергии ЧД.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах Межуниверситетского центра астрономии и астрофизики (МЦАА, Пуна, Индия); на международной конференции "Низкочастотное электромагнитное излучение во Вселенной", Национальный центр радиоастрономии (Индия, 8-12 декабря, 2008 г.); на летней школе по космологии (Триест, Италия, 21 июля-1 августа 2008 г.); на семинарах ИЯФ АН РУз; на семинарах АИ АН РУз; на научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы современной физики" (Ташкент, 2008 г.); на научно-практической конференции студентов и молодых ученых "Роль молодежи в сегодняшнем развитии физики" (Ташкент, 2008 г.); на республиканской конференции молодых ученых (Самарканд, 2008 г.); на II республиканской конференции молодых физиков Узбекистана (Ташкент, 2008 г.); на семинар-тренинге "Современные методы в астрономии" (Ташкент, 2009 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ [1]–[12]. Диссертационная работа выполнена в ИЯФ АН РУз и АИ АН РУз в период 2006-2009 гг. в рамках научных проектов ГКНТ Ф - 2.1.9, Ф - 2.2.6, ФА - Ф2 - Ф079, ФА - Ф2 - Ф061, и ФПФИ АН РУз № 1 - 06, 5 - 08, 29 - 08.

Личный и конкретный вклад автора. В работах, выполненных совместно с научным руководителем и соавторами, вклад автора диссертации был определяющим. Автор выполнил основные численные и аналитические расчеты, приведенные в диссертации, активно участвовал в обсуждениях постановки задач и при анализе полученных результатов. Обобщение результатов и основные выводы, приведенные в заключительном разделе диссертации, сформулированы лично автором.

Содержание работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и список использованных литератур. В **введении** обсуждается актуальность темы диссертации и дается ее краткая характеристика.

В **первой главе** получены точные выражения для электромагнитного поля в пространстве - времени Керр-Тауб-НУТ. Найдены внешние аналитические общерелятивистские выражения для электромагнитных полей медленно

вращающейся намагниченной НЗ с ненулевым гравитомагнитным зарядом. Предполагается, что звезда с дипольным магнитным полем является изолированной и находится в вакууме, а также в качестве простейшей модели рассмотрено монополярное магнитное поле звезды, направленное вдоль радиальной координаты. Приведены результаты по изучению с помощью уравнения Гамильтона-Якоби движения заряженных частиц вокруг Керр-Тауб-НУТ источника, расположенного во внешнем однородном магнитном поле .

Во **второй главе** рассмотрено электромагнитное поле медленно вращающейся КН, приведено точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве медленно вращающейся намагниченной КН. Детально исследовано движение заряженных частиц и показана сильная зависимость движения частиц от форм параметра КН и магнитного поля. Получены выражения для компонент дипольного магнитного поля гравастара, которое генерируется за счет кругового электрического тока симметрично находящегося в экваториальной плоскости.

В **третьей главе** приведены результаты по изучению стационарных электромагнитных полей изолированной медленно вращающейся релятивистской компактной звезды на бране в предположении, что магнитное поле заморожено в звездной коре из-за высокой проводимости идеальной среды. Исследованы бран эффекты, возникающие в звездном магнитном поле при выбранных граничных условиях. Приведены точные решения для внутреннего магнитного поля внутри звездного жесткого вещества с нереалистическим уравнением состояния. Результаты проведенных численных расчетов, которые учитывают эффект напряженности брана на структуру электромагнитного поля вне вращающейся звезды и на конфигурации внутреннего магнитного поля в звездной среде с постоянной плотностью. Получены точные значения для таких физических параметров как эффективный потенциал и СКО для различных значений параметров, характеризующих вакуумное решение уравнений поля в модели на бранах. Приведено точное выражение для нижней границы внутренней стабильной круговой орбиты пробной частицы в окрестности ЧД на бранах. Также приведена графическая зависимость СКО от бран пара-

метра и траектории частиц вокруг ЧД на бранах.

В **четвертой главе** проведен анализ однородного уравнения Максвелла и бессиловое условие в плазменной магнитосфере медленно вращающегося компактного гравитационного объекта. Результаты исследований по эффекту Блэндфорда-Знаека и процессу Пенроуза в метрике Керр-Тауб-НУТ.

В **заключении** приведены основные результаты проведенного исследования. В **приложениях** приводятся уравнения Максвелла в различных аксиально - симметричных гравитационных полях.

Основные результаты работы.

Выведены точные выражения для электромагнитного поля вблизи Керр-Тауб-НУТ пространства-времени. Представлены внешние аналитические общерелятивистские выражения для электромагнитных полей медленно вращающейся намагниченной НЗ с ненулевым гравитомагнитным зарядом. Изучено движение заряженных частиц вокруг Керр-Тауб-НУТ источника, расположенного во внешнем однородном и дипольном магнитном поле.

Приведено точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве медленно вращающейся намагниченной КН. Также исследовано движение заряженных частиц и показана сильная зависимость движения частиц от форм параметра КН и магнитного поля.

Получены выражения для компонентов дипольного магнитного поля гравастара, которое образуется за счет кругового тока симметрично находящегося в экваториальной плоскости.

Изучены стационарные электромагнитные поля изолированной медленно вращающейся релятивистской компактной звезды на бранах. Решены внутренние уравнения Максвелла аналитически и найдены точные решения для внутреннего магнитного поля внутри звездного жесткого вещества с нереалистическим уравнением состояния.

Проведены численные расчеты, которые учитывают эффект напряженности брана на структуру электромагнитного поля вне вращающейся звезды и на конфигурации внутреннего магнитного поля в звездной среде с постоянной плотностью.

Были получены точные значения для таких физических параметров как эффективный потенциал и радиус стабильной круговой орбиты для различных значений параметров, характеризующих вакуумное решение уравнений поля в модели на бранах. Найдено оригинальное точное выражение для нижней границы внутренней стабильной круговой орбиты пробной частицы в окрестности ЧД на бранах.

Приведены результаты исследований об извлечении энергии компактного гравитационного объекта, в частности, с помощью эффекта Блэндфорда-Знаека и процесса Пенроуза в пространстве Керр-Тауб-НУТ.

В данной диссертационной работе используется сигнатура пространства - времени $(-, +, +, +)$ и система единиц в которой $G = 1 = c$ (Однако, в выражениях с астрофизическими применениями скорость света пишется в явном виде). Греческие индексы принимают значения от 0 до 3, а латинские индексы от 1 до 3; ковариантные производные обозначаются точкой с запятой и частные производные запятой.

ГЛАВА 1. Электромагнитное поле и движение частиц в окрестности вращающихся компактных гравитирующих объектов с гравитомагнитным зарядом

1.1 Введение

Наличие сильных электромагнитных полей считается одной из наиболее важных особенностей вращающихся НЗ, наблюдаемых как пульсары. Начиная с пионерских работ Дойтча [57] было доказано, что электрическое поле индуцируется за счет вращения сильно намагниченной звезды. Общерелятивистский эффект увлечения инерциальных систем является очень важным в магнитосфере пульсара [58, 59] и считается источником дополнительного электрического поля общерелятивистского происхождения (см., например [60, 61, 62, 63])

Гинзбургом и Озерным [13] было впервые показано, что электрически нейтральные ЧД не могут иметь собственного магнитного поля. Однако, предположив, что ЧД расположена во внешнем однородном магнитном поле, создаваемом находящимся вблизи источником, таким как НЗ или магнитар, Уолд [14] впервые получил точное решение вакуумных уравнений Максвелла для асимптотически однородного магнитного поля. После этого свойства ЧД во внешнем магнитном поле были подробно изучены разными авторами (см., например [15, 16, 17, 18], и [19]).

В этой главе исследуются электромагнитные поля в пространстве-времени Керр-НУТ и во внешнем пространстве-времени медленно вращающейся на-

магнитной НУТ звезды. Подход основан на предположении, что метрика пространства-времени известна, т.е., исследование посвящено поиску аналитических решений уравнений Максвелла в заданном фоновом пространстве-времени (оценка вклада энергии электромагнитного поля в полную энергию и импульс может быть найдена, например, в [64]), пренебрегая влиянием электромагнитного поля на гравитационное поле.

Мы также исследовали движение пробных частиц вокруг Керр-НУТ компактного объекта, который находится (а) в однородном магнитном поле направленном по оси симметрии и (б) в дипольном магнитном поле, создаваемом круговым током. Мы используем уравнение Гамильтона-Якоби, чтобы найти влияние как НУТ параметра, так и магнитного поля на эффективный потенциал радиального движения пробных заряженных частиц. Кроме того, здесь полностью пренебрегаются патологии (наличие сингулярностей вдоль оси или периодичности временной координаты, наличие регионов пространства-времени, содержащих замкнутые времениподобные кривые) метрики пространства-времени, в силу того, что НУТ параметр считается малым.

Глава имеет следующую схему: в параграфе 1.2 вычислены электрические и магнитные поля, образующиеся в непосредственной близости от Керр-НУТ компактного объекта, используя метод построения вакуумных решений уравнений Максвелла в аксиально-симметричном стационарном пространстве-времени, предложенный Уолдом [14].

В параграфах 1.3 и 1.5 разделяя переменные в уравнении Гамильтона-Якоби, получены выражения для эффективного потенциала радиального движения заряженных частиц вокруг Керр-НУТ компактного объекта в однородном и дипольном магнитных полях. Эти результаты будут использованы для получения основного уравнения, определяющего области стабильных круговых орбит и связанные с ними энергии и угловые моменты.

В параграфе 1.6 рассмотрено стационарное решение уравнений Максвелла в случае, когда магнитное поле звезды имеет монополярную конфигурацию, что позволяет найти точное аналитическое решение. Параграф 1.7 посвя-

щен анализу полученных решений для электрического и магнитного полей в окрестности вращающихся компактных объектов с НУТ параметром.

1.2 Керр-НУТ компактный объект в однородном магнитном поле

Рассмотрим электромагнитное поле компактного астрофизического объекта в пространстве-времени Керр-НУТ, которое в сферической системе координат (ct, r, θ, ϕ) описывается метрикой (см., например, [23, 65])

$$ds^2 = -\frac{1}{\Sigma}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)dt^2 + \frac{2}{\Sigma}[\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta]dtd\phi + \frac{1}{\Sigma}[(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.1)$$

где параметры Σ , Δ и χ определяются как

$$\Sigma = r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \quad \Delta = r^2 - 2Mr - l^2 + a^2, \quad \chi = a \sin^2 \theta - 2l \cos \theta, \quad (1.2)$$

l является гравитомагнитным монопольным моментом, $a = J/M$ - собственный угловой момент метрического источника с общей массой M .

Используем факт существования в этом пространстве-времени времени-подобного $\xi_{(t)}^\alpha$ и пространственноподобного $\xi_{(\phi)}^\alpha$ векторов Киллинга, которые отвечают за стационарность и осевую симметрию геометрии соответственно, а также удовлетворяют уравнению Киллинга

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0. \quad (1.3)$$

Следовательно, волновые уравнения (в вакуумном пространстве-времени) имеют вид

$$\square \xi^\alpha = 0, \quad (1.4)$$

что дает право выбрать решение вакуумных уравнений Максвелла для векторного потенциала A_μ электромагнитного поля в калибровке Лоренца в простой форме

$$A^\alpha = C_1 \xi_{(t)}^\alpha + C_2 \xi_{(\phi)}^\alpha. \quad (1.5)$$

Постоянная $C_2 = B/2$, если гравитационный источник расположен в однородном магнитном поле \mathbf{B} , направленном параллельно к оси вращения. Величину постоянной C_1 можно легко вычислить из асимптотических свойств пространства-времени (1.1) на бесконечности (см Приложение А.).

В конечном итоге, 4-векторный потенциал A_α электромагнитного поля принимает следующий вид

$$A_0 = -\frac{B}{\Sigma} \left\{ \Delta \left(a - \frac{\chi}{2} \right) + a \left[\frac{1}{2}(\Sigma + a\chi) - a^2 \right] \sin^2 \theta \right\} = -\frac{BK}{\Sigma}, \quad (1.6)$$

$$A_3 = \frac{B}{\Sigma} \left\{ \Delta \chi \left(a - \frac{\chi}{2} \right) + (\Sigma + a\chi) \left[\frac{1}{2}(\Sigma + a\chi) - a^2 \right] \sin^2 \theta \right\} = \frac{BL}{\Sigma}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим изменение электростатической энергии заряженной частицы, которая уменьшается при приближении к горизонту событий гравитационного источника. Это изменение принимает следующий вид:

$$\Delta\phi = eA^\mu \xi_{\mu(t)}|_{hor} - eA^\mu \xi_{\mu(t)}|_{inf}, \quad (1.8)$$

На горизонте событий можно ввести новые вектора Киллинга [66, 67]:

$$\begin{aligned} \psi_\mu|_{hor} &= \xi_{\mu(t)} + \Omega|_{hor} \xi_{\mu(\varphi)}, \\ \Omega|_{hor} &= \frac{a}{2Mr_+}, \quad r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 + l^2}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

так как времениподобный вектор Киллинга ξ становится пространственноподобным внутри эргосферы, определяемой как $g_{00} = 0$.

Верхний предел электрического заряда, аккрецированного гравитационным источником:

$$Q = 2aMB - 2lMB \quad (1.10)$$

кроме члена, получаемого за счет Фарадеевской индукции и связанного с угловым моментом a (см. например, [14],[68]), содержит член, пропорциональный НУТ параметру l . Интересно отметить, что различные параметры аккрецируют заряды противоположного знака.

Ортонормированные компоненты электромагнитного поля, измеренного наблюдателем с нулевым угловым моментом (ННУМ), четыре-скорость ко-

того имеет форму:

$$\begin{aligned}
(u^\alpha)_{\text{ZAMO}} &\equiv \\
&\left(\sqrt{\frac{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}{\Delta \Sigma \sin^2 \theta}}, 0, 0, -\frac{\Delta \chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta}{\sqrt{\Delta \Sigma [(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]} \sin \theta} \right); \\
(u_\alpha)_{\text{ZAMO}} &\equiv \left(-\sqrt{\frac{\Delta \Sigma \sin^2 \theta}{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}}, 0, 0, 0 \right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
E^{\hat{r}} &= -\frac{2rB \sin \theta}{\Sigma^2 \sqrt{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}} \left\{ \left[\Delta - \left(1 - \frac{M}{r} \right) \Sigma - a^2 \sin^2 \theta \right] \right. \\
&\quad \left. \times (\Sigma + a\chi) \left(a - \frac{\chi}{2} \right) - \frac{\Sigma}{2} [\chi \Delta - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta] \right\}, \tag{1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^{\hat{\theta}} &= \frac{B \sin^2 \theta}{\Sigma^2 \sqrt{\Delta((\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta)}} \\
&\quad \times \left[\left\{ \Delta(l + a \cos \theta) + 2a(\Sigma + a\chi - 2a^2) \cos \theta \right\} \Sigma(\Sigma + a\chi) \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \Sigma(\Sigma + a\chi - 2a^2) - 2K(l + a \cos \theta) \right\} \frac{\chi \Delta}{\sin^2 \theta} \right], \tag{1.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{\hat{r}} &= \frac{B \sin \theta}{\Sigma \sqrt{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}} \left[\chi \Delta(l + a \cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - (\Sigma - a\chi)(\Sigma + a\chi - 2a^2) \cos \theta - \frac{2K}{\Sigma} (\Sigma + a\chi)(l + a \cos \theta) \right], \tag{1.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{\hat{\theta}} &= -\frac{2rB\Delta}{\Sigma^2 \sqrt{\Delta((\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta)}} \times \left\{ \left[\Delta - \left(1 - \frac{M}{r} \right) \Sigma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a^2 \sin^2 \theta \right] \left(a - \frac{\chi}{2} \right) \chi - \frac{1}{2} \Sigma^2 \sin^2 \theta \right\}, \tag{1.15}
\end{aligned}$$

которые зависят от углового момента и НУТ параметра сложным образом.

С астрофизической точки зрения интересно знать предельные случаи выражений (1.12)–(1.15), например, в линейном и квадратичном приближении $\mathcal{O}(a^2, l^2/r^2)$, для того, чтобы дать физическую интерпретацию возможных физических процессов вблизи медленно вращающихся релятивистских ком-

пактных звезд, где уравнения принимают следующую форму:

$$E^{\hat{r}} = \frac{B}{r} \left\{ (2l + a \cos \theta) \cos \theta - \frac{M(12l \cos \theta + a(1 + 3 \cos 2\theta))}{2r} \right\}, \quad (1.16)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{B \sin \theta}{r} \left\{ l \left(1 + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + a(3 \cos \theta - 1) \right\}, \quad (1.17)$$

$$B^{\hat{r}} = -B \cos \theta \left\{ 1 - \frac{1}{2r^2} \left(-4(l^2 - a^2 + al \cos \theta) - 4l^2 \cot^2 \theta + a(2l + 3a \cos \theta) \sin \theta \tan \theta \right) \right\}, \quad (1.18)$$

$$B^{\hat{\theta}} = B \sin \theta \left\{ 1 - \frac{M}{r} + \frac{1}{16r^2 \sin^2 \theta} (-a^2 + 4l^2 - 4M^2 - 8al \cos \theta + 4(7l^2 + M^2) \cos 2\theta + 8al \cos 3\theta + a^2 \cos 4\theta) \right\}. \quad (1.19)$$

В пределе плоского пространства, то есть для случая $M/r \rightarrow 0$, $Ma/r^2 \rightarrow 0$ и $l^2/r^2 \rightarrow 0$, выражения (1.12)–(1.15) дают

$$\lim_{M/r, Ma/r^2, l^2/r^2 \rightarrow 0} B^{\hat{r}} = -B \cos \theta, \quad \lim_{M/r, Ma/r^2, l^2/r^2 \rightarrow 0} B^{\hat{\theta}} = B \sin \theta, \quad (1.20)$$

$$\lim_{M/r, Ma/r^2, l^2/r^2 \rightarrow 0} E^{\hat{r}} = \lim_{M/r, Ma/r^2, l^2/r^2 \rightarrow 0} E^{\hat{\theta}} = 0. \quad (1.21)$$

Как и следовало ожидать, выражения (1.20)–(1.21) совпадают с решениями для однородного магнитного поля в Ньютоновском пространстве-времени.

Наконец покажем, что два-форма тензора электромагнитного поля принимает упрощенный вид:

$$F = \frac{B}{\Sigma^2} [2Kr - \Sigma(r - M)(2a - \chi)] \omega^1 \wedge \omega^0 + \frac{B(l + a \cos \theta) \sin \theta}{\Sigma^2 \Delta^{1/2}} [\Delta(\Sigma + 2a^2 - a\chi) + a^2(\Sigma + a\chi - 2a^2) \sin^2 \theta - 2aK] \omega^2 \wedge \omega^0 - \frac{Br \Delta^{1/2} \sin \theta}{\Sigma} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{B \cos \theta}{\Sigma^2} [-a\chi(\Sigma + a\chi - 2a^2) \cos \theta + (l + a \cos \theta)[a(\Sigma + a\chi - 2a^2) \sin^2 \theta + 2\Delta a - \Delta\chi]] \omega^2 \wedge \omega^3 \quad (1.22)$$

В ортонормальной плоскости типа (Картер [68]):

$$\omega^0 = \left(\frac{\Delta}{\Sigma} \right)^{1/2} (dt - \chi d\varphi), \quad \omega^1 = \left(\frac{\Sigma}{\Delta} \right) dr, \\ \omega^2 = \Sigma^{1/2} d\theta, \quad \omega^3 = \frac{\sin \theta}{\Sigma^{1/2}} [adt - (r^2 + a^2 + l^2)d\varphi]. \quad (1.23)$$

В предельном случае, когда НУТ параметр обращается в ноль $l \rightarrow 0$, компоненты тензора электромагнитного поля (1.22) совпадают с выражениями (3.9) статьи [14]. В пределе плоского пространства-времени выражения для компонент тензора электромагнитного поля, полученные из (1.22), имеют вид Ньютоновского предела (1.20)–(1.21).

1.3 Движение заряженных частиц

Очень важно детально исследовать движение заряженных частиц вокруг вращающегося компактного источника с НУТ параметром во внешнем магнитном поле, с учетом 4 - вектора потенциала (1.6) и (1.7), с целью нахождения астрофизических доказательств существования гравитомагнитного заряда.

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu \right) = m^2, \quad (1.24)$$

для движения заряженных пробных частиц с массой m , и зарядом e , может быть применено в качестве полезного вычислительного инструмента только в случае, когда возможно разделение переменных.

В связи с тем, что пространство-время Керр-Тауб-НУТ допускает такое разделение (см., например, [23]), мы будем изучать движение вокруг источника, описываемого метрикой (1.1), используя уравнения Гамильтона-Якоби, когда действие S можно представить в виде:

$$S = -\mathcal{E}t + \mathcal{L}\varphi + S_{r\theta}(r, \theta), \quad (1.25)$$

так как энергия \mathcal{E} и угловой момент \mathcal{L} пробной частицы являются константами движения в пространстве-времени (1.1). Это является обобщением подхода, разработанного в работе [15], на случай с ненулевым НУТ параметром.

Таким образом, уравнение Гамильтона-Якоби (1.24) с действием (1.25) за-

ключает в себе уравнение для неразделяемой части действия:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}{\Delta \sin^2 \theta} \left(\mathcal{E} + \frac{eBK}{\Sigma} \right)^2 \\ - \frac{2(\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta)}{\Delta \sin^2 \theta} \left(\mathcal{E} + \frac{eBK}{\Sigma} \right) \left(\mathcal{L} + \frac{eBL}{\Sigma} \right) \\ + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \sin^2 \theta} \left(\mathcal{L} + \frac{eBL}{\Sigma} \right)^2 - m^2 \Sigma = 0 . \end{aligned} \quad (1.26)$$

В общем случае разделение переменных в этом уравнении невозможно, однако, разделение можно осуществить в случае движения в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, тогда уравнение для радиального движения примет форму:

$$\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 = \mathcal{E}^2 - 1 - 2V(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, b, a, l) . \quad (1.27)$$

Здесь σ - собственное время вдоль траектории частицы, \mathcal{E} и \mathcal{L} - энергия и угловой момент на единицу массы m и

$$\begin{aligned} V(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, b, a, l) = \\ - \left(\mathcal{E} + \frac{bK}{M\Sigma} \right) \frac{bK}{M\Sigma} + \frac{b^2 K^2}{2M^2 \Sigma^2} - \frac{a^2}{\Sigma} \left(1 + \frac{a^2}{2\Sigma} \right) \left(\mathcal{E} + \frac{bK}{M\Sigma} \right)^2 \\ - \frac{2l^2 + 2Mr - a^2}{2\Sigma} + \frac{\Delta - \Sigma - a^2}{\Sigma^2} a \left(\mathcal{E} + \frac{bK}{M\Sigma} \right) \left(\mathcal{L} + \frac{bL}{M\Sigma} \right) \\ - \frac{\Delta - a^2}{2\Sigma^2} \left(\mathcal{L} + \frac{bL}{M\Sigma} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

можно рассматривать как эффективный потенциал радиального движения, который зависит от дополнительного безразмерного параметра

$$b = \frac{eBM}{m} , \quad (1.29)$$

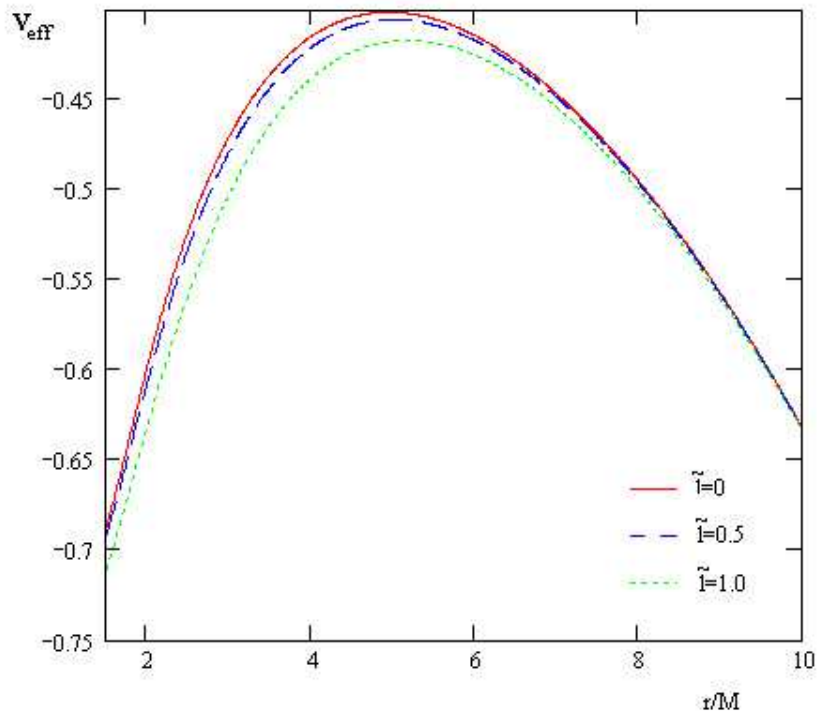
отвечающего за относительное влияние однородного магнитного поля на движение заряженных частиц и достаточно влиятельного даже при малых значениях магнитного поля [15]. На рисунке 1.1 показана радиальная зависимость эффективного потенциала (1.28) для различных значений НУТ параметра $\tilde{l} = l/M$. Из этой зависимости можно получить изменение радиального движения заряженных частиц в экваториальной плоскости в присутствии НУТ

параметра. Как видно из рисунка, гравитомагнитный монополярный момент изменяет форму эффективного потенциала, когда внешнее магнитное поле не является сильным (рис. 1.1, а). В случае сильного внешнего магнитного поля (рис. 1.1, б), влияние гравитомагнитного монополярного момента пренебрежимо мало.

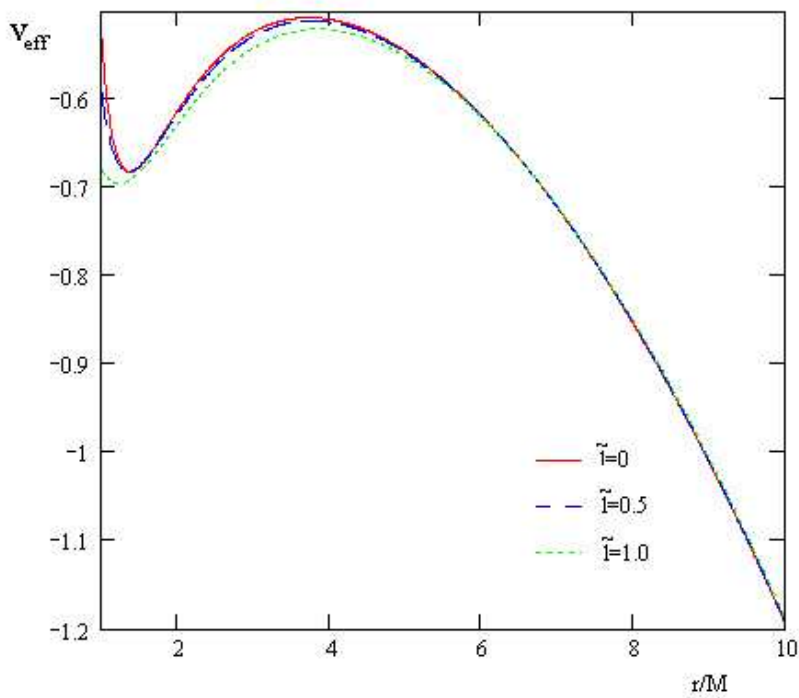
Рисунок 1.2 показывает радиальную зависимость эффективного потенциала (1.28) для различных значений b при фиксированном значении параметра НУТ $\tilde{l} = 0.5$. Движение заряженных частиц в присутствии такого рода эффективного потенциала может быть объяснено следующим образом: в присутствии внешнего магнитного поля, дополнительно к стабильной круговой орбите, могут появиться нестабильные круговые орбиты в связи с появлением максимума на графике эффективного потенциала из которого можно найти качественный состав орбит частиц. Как видно из рисунка, потенциал имеет отталкивающий характер. Это означает, что частицы, приходящие из бесконечности и проходящие мимо источника, не будут захвачены: они будут отражены и будут уходить на бесконечность. Для малых значений электромагнитного поля частицы могут двигаться как на связанных так и на несвязанных орбитах в зависимости от их энергии. С увеличением внешнего электромагнитного поля появляется интересная особенность: орбиты начинают становиться только параболическими и гиперболическими, а не круговыми или эллиптическими.

1.4 Нестабильные круговые орбиты

Особый интерес в теории аккреции пробных частиц вокруг вращающихся компактных источников с НУТ параметром в магнитном поле связан с изучением круговых орбит в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, когда величина $dr/d\sigma$ равна нулю. Хорошо известно, что в присутствии НУТ параметра траектории частиц лежат в конусе с $\cos\theta = \pm|2l\mathcal{E}/\mathcal{L}|$ (см. например [65]). В случае, когда энергия и импульс частицы равны $\mathcal{E} = 0.9$ и $\mathcal{L} = 4.3$, соответственно, а НУТ параметр $\tilde{l} \approx 0.5$, мы получаем $90^\circ - 10^\circ \leq \theta \leq 90^\circ + 10^\circ$, что позволяет пренебречь отклонением и рассматривать движение практически



a)



б)

Рис. 1.1: Радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженной частицы вокруг источника Керр-Тауб-НУТ, расположенного в однородном магнитном поле для различных значений НУТ параметра $\tilde{l} = l/M$ для двух значений магнитного поля: а) $b = 0.1$ и б) $b = 0.15$.

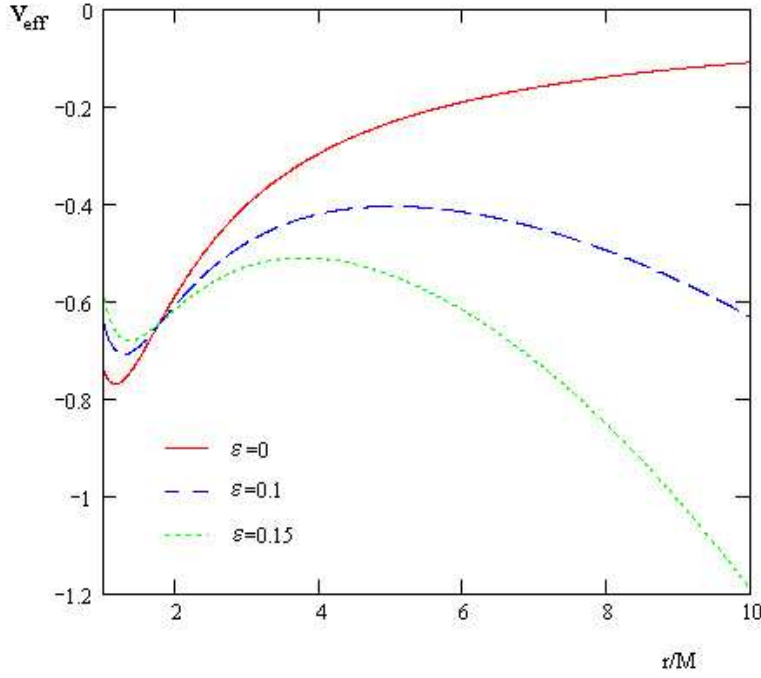


Рис. 1.2: Радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженной частицы вокруг Керр-Тауб-НУТ источника, расположенного в однородном магнитном поле для различных значений магнитного поля, когда НУТ параметр $\tilde{l} = 0.5$

в экваториальной плоскости. Следовательно правая часть уравнения (1.28) равна нулю:

$$\mathcal{E}^2 - 1 - 2V(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, b, a, l) = 0 \quad (1.30)$$

А также первая производная по r :

$$\frac{\partial V(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, b, a, l)}{\partial r} = 0 . \quad (1.31)$$

В работах [69] и [70] авторы провели численный анализ аналогичных уравнений (1.30) и (1.31), когда НУТ параметр равен нулю, для разных значений интегралов движения, орбитального радиуса, параметра вращения a , а также параметра магнитного поля. Задача о существовании стабильных орбит в НУТ пространстве-времени [71] и о других свойствах движения частиц обсуждалась в работе [72].

Радиус слабой стабильности, соответствующий энергии и моменту импульса круговых орбит, может быть получен одновременным решением условия:

$$\frac{\partial^2 V(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, b, a, l)}{\partial r^2} = 0 \quad (1.32)$$

и уравнения (1.30).

Из уравнений (1.30) и (1.31) можно найти энергию

$$\mathcal{E} = -\frac{ab}{M} + \gamma \pm \sqrt{\lambda}, \quad (1.33)$$

и угловой момент

$$\mathcal{L} = -\frac{b}{2M}(l^2 + a^2) + \eta \pm (4ab - 12r\gamma)\sqrt{\lambda} \quad (1.34)$$

пробной частицы, где были использованы следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{2ab(r - \beta)}{3r^2 - l^2 - 6\beta r}, \quad \beta = r \frac{6r - 4M}{12r - 4M}, \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \lambda = & [3r^2 - l^2 - 6\beta r]^{-1} \left[\frac{5b^2r^3}{4M^2}(r - 4\beta) - \frac{2b^2r^2}{M}(r - 3\beta) \right. \\ & \left. + 3r \left(1 - \frac{3b^2l^2}{4M^2} \right) (r - 2\beta) + 2 \left(\frac{l^2 - a^2}{M}b^2 - 2M \right) (r - \beta) + a^2 - 2l^2 \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

и

$$\begin{aligned} \eta = & 4ab\gamma - 6r\lambda - 6r\gamma^2 - \frac{5b^2r^3}{M^2} + \frac{6b^2r^2}{M} \\ & - 6r \left(1 - \frac{3b^2l^2}{4M^2} \right) - 2 \left(\frac{l^2 - a^2}{M}b^2 - 2M \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Подставляя (1.33) и (1.34) в уравнение (1.32) получим основное уравнение

$$\begin{aligned} & (r^3 - l^2r + 2a^2M)(\gamma \pm \sqrt{\lambda})^2 + 2ab(2l^2 - r^2)(\gamma \pm \sqrt{\lambda}) \\ & + 4aM(\gamma \pm \sqrt{\lambda}) \\ & \times (\eta \pm (4ab - 12r\gamma)\sqrt{\lambda}) + 2br^2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) (\eta \pm (4ab - 12r\gamma)\sqrt{\lambda}) \\ & + \frac{b^2r^5}{4M^2} - \frac{b^2r^4}{2M} + \left(1 - \frac{3b^2l^2}{4M^2} \right) r^3 + \left(\frac{l^2 - a^2}{M}b^2 - 2M \right) r^2 \\ & + (a^2 - 2l^2)r + 2Ml^2 - \frac{4a^2l^2b^2}{M} = 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

решение которого определяет радиус слабо-стабильных круговых орбит, как функцию НУТ параметра l , углового момента a , а также параметра магнитного поля b . В таблице 1.1 показаны результаты численных решений для радиусов стабильной круговой орбиты частиц для различных значений НУТ

Таблица 1.1: Слабо-стабильные круговые орбиты вокруг невращающегося НУТ источника, расположенного в однородном магнитном поле

\tilde{l}	0	0.01	0.1	0.3	0.5
$b = 0.1$	3.66650	3.66460	3.66154	3.62072	3.53294
$b = 0.2$	2.83292	2.83288	2.82876	2.79448	2.72020
$b = 0.3$	2.55504	2.55500	2.55162	2.52360	2.46338
$b = 0.4$	2.41614	2.41610	2.41326	2.38984	2.33994
$b = 0.5$	2.33282	2.33280	2.33036	2.31032	2.26794

параметра и внешнего магнитного поля. С увеличением гравитомагнитного монопольного момента радиус стабильной круговой орбиты перемещается к компактному объекту, в то время как внешнее поле также притягивает орбиты к гравитационному источнику.

1.5 Движение заряженных частиц в поле токопроводящей петли, расположенной вблизи Керр-НУТ компактного объекта

Рассмотрим движение пробной частицы в электромагнитном поле, созданном тороидальным током ионизированной материи, вращающейся в аккреционном диске [73] вокруг Керр-НУТ компактного объекта и будем использовать внутренние решения [74]. Из полного мультипольного решения для магнитного поля [74] ограничимся доминирующей (дипольной) частью, которая определяется по формуле

$$A_\alpha = -\frac{3}{8}\delta_\alpha^\varphi \frac{\mu r^2 \sin^2 \theta}{M^3} \left[\ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) + \frac{2M}{R} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \right], \quad (1.39)$$

где

$$\mu = \pi R^2 \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} I$$

является модулем дипольного момента, связанного с током I в петле, а R радиус петли, который считается приблизительно равным $6M$ (из-за малости значений l и a он не изменяется существенно) (см. [74]).

Используя уравнение Гамильтона-Якоби (1.24) и потенциал (1.39), можно найти выражение для эффективного потенциала радиального движения заряженных частиц в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$):

$$V_{eff} = -\frac{a^2}{\zeta} \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{\zeta} \right) \mathcal{E}^2 - \frac{2\eta - a^2}{2\zeta} + \frac{2a\mathcal{E}\eta}{\zeta^2} \left(\mathcal{L} - \frac{\varepsilon}{M} r^2 \right) + \frac{\zeta - 2\eta}{2\zeta^2} \left(\mathcal{L} - \frac{\varepsilon}{M} r^2 \right)^2, \quad (1.40)$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$\zeta = r^2 + l^2, \quad \eta = Mr + l^2,$$

и

$$\varepsilon = -\frac{3}{8} \frac{e\mu}{mM^2} \left[\ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) + \frac{2M}{R} \left(1 + \frac{2M}{R} \right) \right].$$

В случае, когда параметр вращения a перенебрежимо мал, эффективный потенциал принимает следующую форму:

$$V_{eff} = -\frac{\eta}{\zeta} + \frac{\zeta - 2\eta}{2\zeta^2} \left(\mathcal{L} - \frac{\varepsilon}{M} r^2 \right)^2, \quad (1.41)$$

которая совпадает с эффективным потенциалом радиального движения в экваториальной плоскости в метрике Шварцшильда (см. например, [75]), если подставить $\zeta = r^2$, $\eta = Mr$, и $\varepsilon = 0$ в уравнение (1.41).

На рисунке 1.3 показана радиальная зависимость эффективного потенциала, которая определяется выражением (1.40), для различных значений \tilde{l} . Как и в случае однородного внешнего магнитного поля, описанного в предыдущем разделе, в данном случае гравитомагнитный монополярный момент влияет на эффективный потенциал, если магнитное поле слабо (Рис.1.3, а). Если магнитное поле петли сильно, влияние гравитомагнитного монополярного момента мало (Рис.1.3, б).

Рассмотрим теперь стабильные круговые орбиты заряженных частиц, как это было сделано в параграфе 1.3 и повторим расчеты, сделанные в параграфе 1.4, для данного случая. Используя выражение (1.41) в качестве эффективного потенциала, находим численные решения для радиусов стабильной круговой орбиты заряженных частиц. Из результатов, показанных в таблице

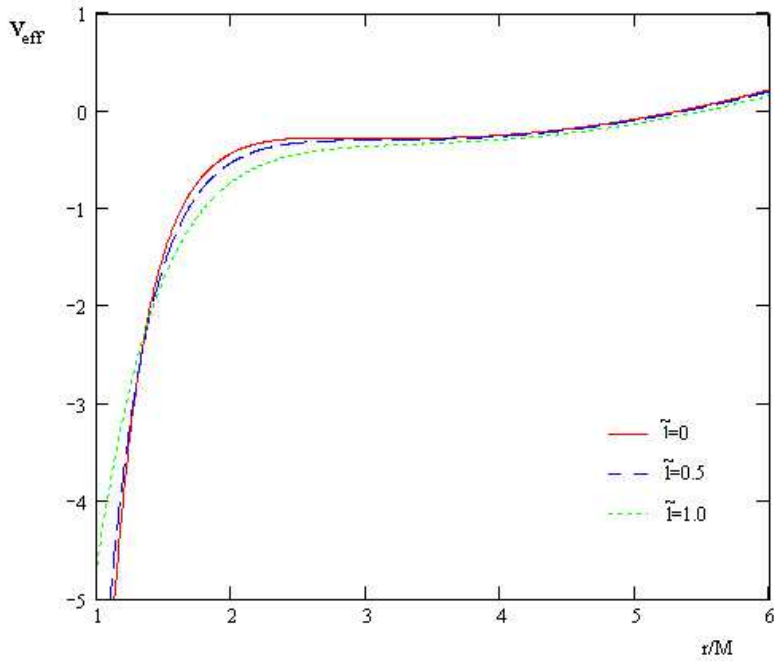
Таблица 1.2: Стабильные орбиты пробных частиц вокруг невращающегося источника с гравитомагнитным монопольным моментом, расположенного во внешнем электромагнитном поле токопроводящей петли (анти-Ларморовы орбиты)

\tilde{l}	0	0.01	0.1	0.3	0.5
$\varepsilon = 0.1$	3.65296	3.65305	3.66106	3.72475	3.84692
$\varepsilon = 0.2$	3.09353	3.09360	3.10045	3.15506	3.26056
$\varepsilon = 0.3$	2.83420	2.83427	2.84064	2.89154	2.99030
$\varepsilon = 0.5$	2.57592	2.57598	2.58190	2.62931	2.72175
$\varepsilon = 0.7$	2.44347	2.44353	2.44922	2.49488	2.58422

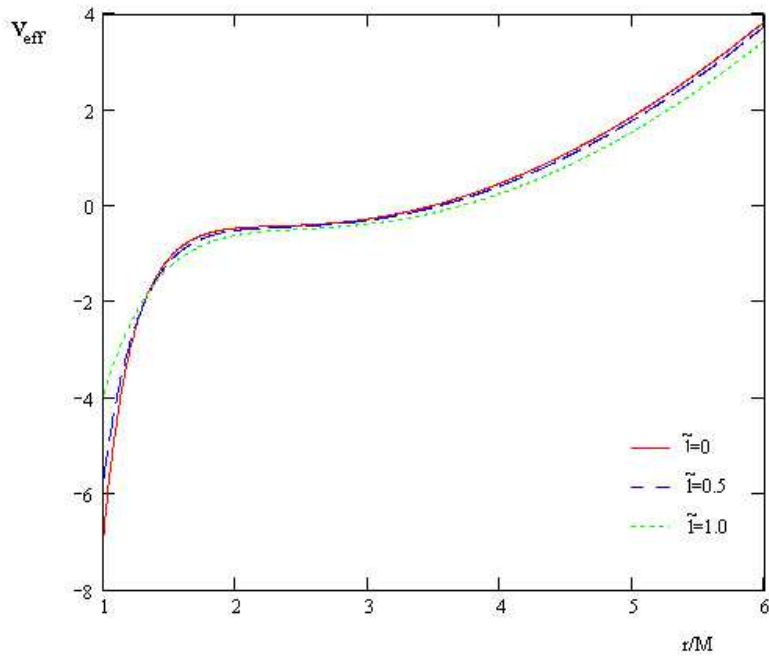
Таблица 1.3: Стабильные орбиты пробных частиц вокруг невращающегося источника с гравитомагнитным монопольным моментом, расположенного во внешнем электромагнитном поле токопроводящей петли (Ларморовы орбиты)

\tilde{l}	0	0.01	0.1	0.3	0.5
$\varepsilon = 0.1$	4.50043	4.50058	4.51456	4.62526	4.83569
$\varepsilon = 0.2$	4.36234	4.36248	4.37677	4.48985	4.70439
$\varepsilon = 0.3$	4.33040	4.33054	4.34495	4.45890	4.67491
$\varepsilon = 0.5$	4.31295	4.31310	4.32758	4.44206	4.65896
$\varepsilon = 0.7$	4.30800	4.30815	4.32265	4.43729	4.65445

1.2 и таблице 1.3 (для анти-Ларморовых и Ларморовых орбит соответственно), можно заключить, что с увеличением гравитомагнитного монопольного момента радиусы анти-Ларморовых и Ларморовых орбит перемещаются в сторону петли, а с увеличением электрического тока (создающего дипольное магнитное поле) стабильные круговые орбиты перемещаются в сторону компактного объекта. Эти результаты могут быть полезны для определения НУТ параметра из астрофизических наблюдений.



а)



б)

Рис. 1.3: Радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженной частицы вокруг Керр-Тауб-НУТ источника в присутствии токопроводящей петли вокруг него для разных значений НУТ параметра $\tilde{l} = l/M$ для случаев, когда модуль дипольного магнитного поля равен а) $\varepsilon = 0.3$ и б) $\varepsilon = 0.7$.

1.6 Внешнее электромагнитное поле медленно вращающейся звезды для магнитного поля со специальной монополярной конфигурацией

В этом разделе рассмотрим стационарные решения уравнений Максвелла, то есть решения, в которых предполагается, что магнитный момент звезды не меняется во времени, как результат бесконечной проводимости внутренней части звезды. Предполагается, что внешнее электрическое поле генерируется магнитным полем, имеющим специальную монополярную конфигурацию. В этом случае можно получить и изучить аналитическое решение с подробным рассмотрением вкладов эффекта увлечения ИСО и ненулевого НУТ заряда на величину внешнего электрического поля медленно вращающейся намагниченной НУТ звезды.

Основное приближение в специфическом виде на фоне метрики, которую выбираем в виде метрики стационарной, осесимметричной системы, взятой в первом порядке по угловому моменту a и гравитомагнитному монополюльному моменту l . "Метрика медленного вращения" для внешнего пространства-времени вращающейся релятивистской звезды с ненулевым гравитомагнитным зарядом имеет вид:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2 [\omega(r)r^2 \sin^2 \theta + 2lN^2 \cos \theta] dt d\varphi , \quad (1.42)$$

то есть, метрика Шварцшильда и члены Лензе-Тирринга и Тауб-НУТ. Параметр $N \equiv (1 - 2M/r)^{1/2}$ называется функцией длительности, $\omega(r) \equiv 2J/r^3$ – угловая скорость Лензе-Тирринга свободного падения ИСО.

Как действующую модель рассмотрим следующую конфигурацию магнитного поля [76]

$$B^{\hat{r}} = B^{\hat{r}}(r) \neq 0 , \quad B^{\hat{\theta}} = 0 . \quad (1.43)$$

Хотя эта форма магнитного поля не считается реалистичной, мы покажем, что эта модель может быть использована для получения оценки влияния гравитационного поля НУТ заряда на внешнее электромагнитное поле звезды.

В этом случае соответствующие уравнения Максвелла сводятся к

$$(r^2 B^{\hat{r}})_{,r} = 0 . \quad (1.44)$$

Решением этого уравнения является

$$B^{\hat{r}} = \frac{\mu}{r^2} , \quad (1.45)$$

где μ константа интегрирования, ответственная за монополярный источник магнитного поля.

Радиальное магнитное поле непрерывно на звездной поверхности и вполне разумно предположить, что лишь θ компонента электрического поля сохранится, поскольку она образуется за счет векторного произведения скорости и магнитного поля внутри НЗ из-за бесконечной проводимости внутри звездной материи. Согласно [64], внутреннее электрическое поле имеет вид

$$E_{in}^{\hat{\theta}} = -e^{-\Phi} v^{\hat{\phi}} B_{in}^{\hat{r}} , \quad (1.46)$$

где $v^{\hat{\phi}}$ – скорость звездной материи, которая равна $\Omega r \sin \theta$ для ньютоновской равномерно вращающейся звезды с угловой скоростью Ω , $g_{00} = -e^{2\Phi}$.

Тогда электрическое поле, создаваемое монополярным магнитным полем, определяется с помощью следующего уравнения Максвелла

$$\left(r N E^{\hat{\theta}} \right)_{,r} - \mu \sin \theta (\omega)_{,r} - \frac{2\mu l \cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{N^2}{r^2} \right)_{,r} = 0 . \quad (1.47)$$

Аналитическое решение

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{\omega - \Omega \mu}{c N} \frac{\mu}{r} \sin \theta + \frac{2l N \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\mu}{r^2} \quad (1.48)$$

уравнения (1.47) ответственно за электрическое поле НУТ звезды с монополярным магнитным полем (3.10). Постоянная интегрирования $-(\Omega \mu / c) \sin \theta$ была найдена из сшивки внешнего решения $(C_3 / r N)$ с внутренним решением (1.46) в ньютоновском случае, принимая во внимание тот факт, что тангенциальные компоненты электрического поля и радиальная составляющая магнитного поля непрерывны при переходе через поверхность звезды. Векторный потенциал полей (3.10) и (1.48) определяется как

$$A_{\alpha} \equiv \left(0, 0, 0, -\mu \cos \theta \right) . \quad (1.49)$$

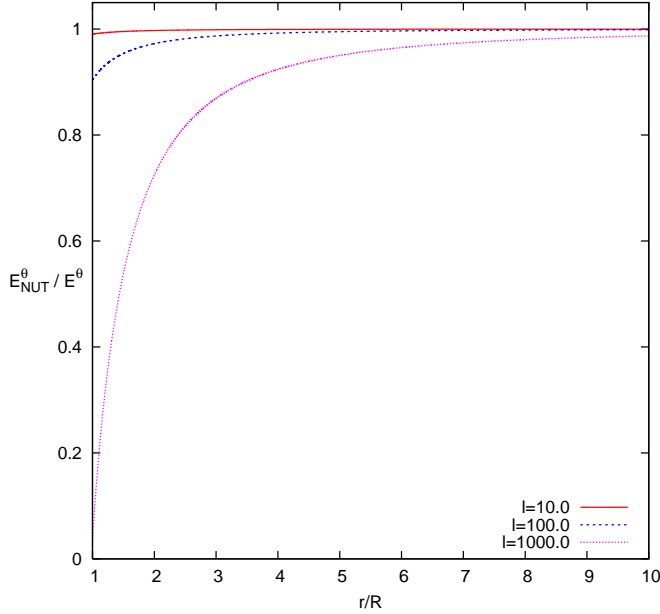


Рис. 1.4: Радиальная зависимость отношения напряженности электрического поля к напряженности последнего при $l = 0$ для различных значений НУТ параметра. Значения НУТ параметра l даны в единицах $см$.

На рисунке 1.4 показана радиальная зависимость нормированного значения электрического поля при $l = 0$ для разных значений НУТ параметра. В ходе этого анализа используются типичные параметры для НЗ: радиус звезды $R = 10^6$ $см$, $M = 2 \times 10^5$ $см$, $\Omega = 2\pi/(0.1c)$, $\omega = 4MR^2\Omega/(5r^3)$, магнитное поле на звездной поверхности – 10^{12} $Гс$. В связи с тем, что в правой части выражения (1.48) первый и второй члены имеют различные знаки, нормированные значения меньше единицы. Полученные результаты свидетельствуют о сильной зависимости электрического поля от НУТ параметра.

1.7 Заключение

Выведенные точные выражения (1.12)–(1.15) для электромагнитного поля вблизи Керр-Тауб-НУТ пространства-времени свидетельствуют о том, что электромагнитное поле сильно зависит от гравитомагнитного заряда, причем индуцированное электрическое поле (1.12), (1.13) зависит от НУТ параметра l линейно, а магнитное поле (1.14), (1.15) зависит от l квадратично.

Получены внешние аналитические общерелятивистские выражения для

электромагнитных полей медленно вращающейся намагниченной НЗ с ненулевым гравитомагнитным зарядом l . Звезда является изолированной и находится в вакууме, а также в качестве примера получено монополярное магнитное поле направленное вдоль радиальной координаты.

Показано, что общерелятивистские поправки, получаемые в результате увлечения ИСО и наличия гравитомагнитного заряда, не присутствуют в выражении для магнитного поля аналогично случаю с дипольным полем [13, 77], а возникают только в выражении для электрического поля. В частности, показано, что увлечение ИСО и гравитомагнитный заряд возбуждают дополнительные индуцированные электрические поля, которые аналогичны случаю вращения звезд в пределе плоского пространства-времени [62].

Изучено движение заряженных частиц вокруг источника Керр-Тауб-НУТ, расположенного (а) во внешнем однородном и (б) дипольном магнитном поле, с помощью уравнения Гамильтона-Якоби. Показано, что в присутствии НУТ параметра и магнитного поля форма эффективного потенциала изменяется. Однако изменение, вызванные внешним электромагнитным полем, является доминирующим. Исследование устойчивости движения заряженных частиц показывает, что внешнее магнитное поле сдвигает орбиты пробных частиц к источнику в обоих случаях, в то время как НУТ параметр сдвигает их к источнику в случае однородного магнитного поля и в обратном направлении в случае присутствия токопроводящей петли вокруг компактного объекта.

ГЛАВА 2. Движение частиц и электромагнитные поля в пространстве-времени компактных объектов с экзотическими уравнениями состояния

2.1 Введение

Задача об электромагнитном поле сильно намагниченной вращающейся НЗ, такой как пульсар или магнитар, имеет большое значение для физики КН и для изучения движения частиц вокруг нее, особенно вокруг ее горловины. В работе [29] автор детально рассмотрел решение вращающейся КН и по сути описал эргорегион, который окружает горловину на экваторе КН.

Движение частиц вокруг КН и возможность увлечения частиц, движущихся в направлении ее окрестности, являются предметом физической реальности. Для того, чтобы сделать Лоренцеву КН проходимой и стабильной, используются экзотические уравнения состояния вещества, которые нарушают известные энергетические условия в связи с наличием геометрических структур [30, 31, 78]. Разные модели для таких КН были недавно изучены в работах [79, 80, 81, 82, 83, 84].

За счет вращения намагниченной звезды в вакууме индуцируется электрическое поле [57]. В ОТО генерируется дополнительное электрическое поле (см., например, [60, 61, 62, 63]) за счет увлечения ИСО, которое становится очень важным в магнитосфере пульсаров [58, 59]. В рамках ОТО медленно вращающиеся КН были предметом изучения, в частности, в контексте тензора энергии-импульса [85], скалярного поля [86, 87] и электромагнитного

поля [88]. Точные решения КН с классическим, минимально связанным, безмассовым скалярным полем и электрическим зарядом обсуждаются в работе [89], где показано, что электрический заряд изменяет гравитационное поле в окрестности КН, но это изменение геометрии пространства-времени несущественно.

Наличие сильного электромагнитного поля является одной из наиболее важных особенностей вращающихся компактных звезд, наблюдаемых как пульсары и магнитары с поверхностным магнитным полем превышающим 10^{14} Гс [90]. С другой стороны, понятие компактных астрофизических объектов было одним из центральных вопросов, рассматриваемых в ОТО в рамках теории астрофизических процессов и структур. Поиск решений уравнений Эйнштейна с разными вкладками в физический источник гравитационного поля был одним из средств на пути к достижению понимания картины мироздания. Среди решений, найденных на сегодняшний день, решение для ЧД с интригующими свойствами и характеристиками является, безусловно, одним из самых интересных.

В этой главе рассмотрим движение заряженных пробных частиц в гравитационном и электромагнитном полях медленно вращающейся КН с магнитным дипольным моментом, используя уравнение Гамильтона-Якоби, чтобы найти влияние обеих полей на эффективный потенциал радиального движения пробных частиц. В параграфе 2.2 вычислим потенциал электромагнитного поля в окрестности аксиально-симметричной медленно вращающейся намагниченной КН.

Далее, в параграфе 2.3 рассмотрим разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и получим выражение для эффективного потенциала движения заряженных частиц вокруг медленно вращающейся КН с дипольным электромагнитным полем. Также найдена зависимость стабильных круговых орбит заряженных частиц от магнитного момента КН и приведены результаты в виде таблицы. В параграфе 2.5 изучена дипольная конфигурация магнитного поля и представлены решения уравнений Максвелла во внутреннем пространстве медленно вращающегося гравастара. Оболочка гравастара, ко-

торая порождает магнитное поле, моделируется как сфера, состоящая из идеальной высоконамагниченной жидкости с бесконечной проводимостью. Дипольное магнитное поле гравастара создается за счет кругового симметричного тока, находящегося на радиусе a в экваториальной плоскости.

И наконец, в параграфе 2.6, приведены выводы. Данное исследование движения заряженных частиц в потенциале электромагнитного поля вокруг медленно вращающейся намагниченной КН и гравастара проводится с целью поиска астрофизических доказательств существования таких объектов и изучения их возможных отличий от других объектов, таких как, ЧД.

2.2 Потенциал электромагнитного поля вокруг КН

Можно пренебречь квадратичными членами угловой скорости (ω) свободного падения ИСО в приближении медленного вращения КН. Таким образом, метрика, которая описывает пространство-время вокруг аксиально-симметричной медленно вращающейся КН, может быть записана в следующем виде [91, 92]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} \cdot dt^2 + \left[1 - \frac{b(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - 2\omega(r)r^2 \sin^2 \theta d\varphi dt. \quad (2.1)$$

Здесь r – радиальная координата, $\phi(r)$ – так называемая функция красного смещения, $b(r)$ – функция формы, $\omega(r) = 2J/r^3$ – угловая скорость Лензе-Тирринга, где J – полный угловой момент гравитирующего объекта. Горловина КН соответствует минимуму $r = r_0 = b(r_0)$, причем $\partial b/\partial r|_{r_0} \leq 1$. Наличие горизонта соответствует $\phi \rightarrow -\infty$ или $e^\phi \rightarrow 0$, так что ϕ конечна везде.

Сделаем несколько предположений, которые будут использованы в дальнейшем. Во-первых, предположим, что вне КН нет никакого вещества, откуда следует, что проводимость $\sigma = 0$ для внешней метрики. Также предположим, что магнитный момент КН не меняется во времени из-за очень высокой проводимости вещества КН, где создается магнитное поле. Однако, компоненты электромагнитного поля будут меняться периодически из-за угла наклона χ между направлениями магнитного диполя μ и осью вращения.

В присутствии магнитного дипольного момента КН точные внешние решения уравнений Максвелла имеют следующий вид:

$$E^{\hat{r}} = -\frac{\mu\Omega r_0^2 e^{-\phi}}{r^4} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} \left[\cos \chi \left(3 \cos^2 \theta - 1 + \frac{8M}{5r} \sin \theta \right) + \sin \chi \cos \lambda \left(\frac{3}{2} \sin 2\theta - \frac{8M}{5r} \cos \theta \right) \right], \quad (2.2)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{2\mu\Omega r_0^2 e^{-\phi}}{r^4} \left[\cos \chi \cos \theta \left(\sin \theta + \frac{4M}{5r} \right) + \sin \chi \cos \lambda \left(\cos 2\theta + \frac{4M}{5r} \sin \theta \right) \right], \quad (2.3)$$

$$E^{\hat{\varphi}} = -\frac{\mu\Omega e^{-\phi}}{r^2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} + 2 \csc \theta \right) \sin \chi \sin \lambda \cos \theta, \quad (2.4)$$

$$B^{\hat{r}} = \frac{2\mu}{r^3} (\sin \chi \cos \lambda + \cos \chi \cot \theta), \quad (2.5)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{2\mu}{r^3} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}} (\sin \chi \cot \theta \cos \lambda - \cos \chi), \quad (2.6)$$

$$B^{\hat{\varphi}} = \frac{2\mu}{r^3} \sin \chi \sin \lambda \cot \theta, \quad (2.7)$$

где $\hat{}$ (hat) отвечает за ортонормированные компоненты электрического и магнитного полей,

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta} u^\beta, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\rho} F_{\beta\gamma} u_\rho,$$

измеренные наблюдателем с нулевым угловым моментом (ННУМ), 4-скорость которого имеет следующей вид:

$$u^\alpha = e^{-\phi} (1, 0, 0, \omega), \quad u_\alpha = e^\phi (1, 0, 0, 0),$$

где μ – магнитный момент КН, Ω – угловая скорость, M – общая масса (см., например, [91]) и $\lambda(t) = \varphi - \Omega t$ – мгновенная азимутальная позиция.

Четыре-потенциал электромагнитного оля для этих решений состоит только из двух ненулевых компонент:

$$A_0 = \frac{\mu\Omega r_0^2}{3r^3} \left[\cos \chi (3 \cos^2 \theta - 1) + 3 \sin \chi \cos \lambda \sin \theta \cos \theta \right], \quad (2.8)$$

$$A_3 = \frac{2\mu}{r} (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta \cos \lambda). \quad (2.9)$$

2.3 Движение заряженных частиц вокруг медленно вращающейся намагниченной кротовой норы

Ранее, в работе [91] решение уравнений Эйнштейна для КН сравнены с решением Райснер-Нордстрем для компактных объектов с верхним пределом для магнитного заряда, при этом метрические компоненты КН (2.1) были записаны в виде:

$$\exp \phi = \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{1+\delta}, \quad (2.10)$$

и

$$b(r) = r_h \left[1 + \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{1-\delta}\right]. \quad (2.11)$$

Значение δ в выражениях (2.10) и (2.11) может быть найдено из трансцендентного уравнения $b(r_0) = r_0$:

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{r_h}{r_0}\right)}{\ln\left(1 - \frac{r_h}{r_0}\right)}. \quad (2.12)$$

Ранее, в работе [23] было показано, что для метрик, описывающих осесимметричное пространство-время, переменные в уравнении Гамильтона-Якоби могут быть разделены в том случае, если действие S записывается в виде (1.25).

С помощью выражений (2.8) и (2.11) уравнение (1.24) может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ \mathcal{E} - \frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} \left[\cos \chi (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{2} \sin \chi \cos \lambda \sin 2\theta \right] \right\}^2 + \frac{8Mr_0^2\Omega\mathcal{E}}{5r^3} \right) \\ & \times \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{-2(1+\delta)} + \left\{ 1 - \frac{r_h}{r} \left[1 + \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{1-\delta} \right] \right\} \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} \right)^2 \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\mathcal{L} + e \frac{2\mu}{r} (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta \cos \lambda) \right]^2 = m^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В этом уравнении разделить переменные можно при движении частиц в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Тогда уравнение для радиального движения принимает форму

$$\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 = \mathcal{E}^2 - V_{eff}^2(r, \mu, \Omega, \chi, r_0, r_h, \delta, \mathcal{E}, \mathcal{L}), \quad (2.14)$$

где величину

$$V_{eff}^2 = \left[1 - \frac{r_h}{r} - \frac{r_h}{r} \left(1 - \frac{r_h}{r} \right)^{1-\delta} \right] \left[\frac{1}{r^2} \left(\mathcal{L} + \frac{2e\mu \cos \chi}{r} \right)^2 - 1 \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{r_h}{r} \right)^{-2(1+\delta)} \left\{ \mathcal{E}^2 + \frac{r_0^2 \Omega \mathcal{E}}{15r^4} [(5r + 24M)2e\mu \cos \chi - 8Mr\mathcal{L}] \right\} \right] \quad (2.15)$$

можно рассматривать как эффективный потенциал радиального движения пробной заряженной частицы, где σ - собственное время вдоль траектории частицы и некоторые величины измеряются в единицах массы пробной частицы, а именно: $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/m$, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/m$, и $\mu \rightarrow \mu/m$.

На рисунке 2.1 показана радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженной пробной частицы в экваториальной плоскости медленно вращающейся намагниченной КН при различных значениях параметра δ (а) и магнитного дипольного момента μ (б). Из этой зависимости можно получить качественную картину радиального движения заряженных частиц в экваториальной плоскости КН. Как видно из рисунка 2.1 параметр δ изменяет форму эффективного потенциала только вблизи объекта. На больших расстояний от центрального объекта влияние параметра оказывается незначительным, а это значит, что отличить КН от ЧД (или компактного объекта с неэкзотическими уравнениями состояния) можно только вблизи этих объектов.

Движение заряженных частиц в присутствии такого рода эффективного потенциала может быть объяснено следующим образом: с увеличением величины магнитного дипольного момента КН круговые орбиты становятся более нестабильными и вероятность ухода частицы в бесконечность растет. С помощью этого потенциала можно провести качественный анализ орбит частиц. Как видно из рисунка 2.1, потенциал имеет отталкивающий характер. Это означает, что частицы, приходящие из бесконечности и проходящие мимо источника, не захватываются: они будут отражены и будут уходить снова в бесконечность, как это было в случае ЧД. Для слабого электромагнитного поля КН частицы могут оказаться захваченными на связанных орбитах в зависимости от их энергии. С увеличением магнитного дипольного момента μ

наблюдается следующий эффект: орбиты становятся только параболическими или гиперболическими, а не круговыми или эллиптическими.

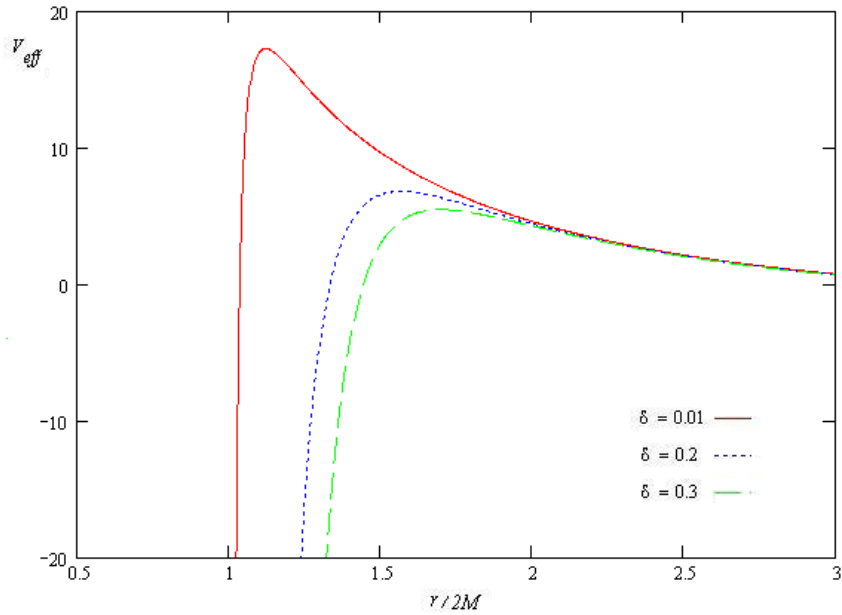
Из уравнения (2.13) можно легко получить уравнения, описывающие движение пробных частиц, что сделано ниже.

Траектория заряженной частицы вокруг медленно вращающейся намагниченной КН может быть описана с помощью следующего уравнения:

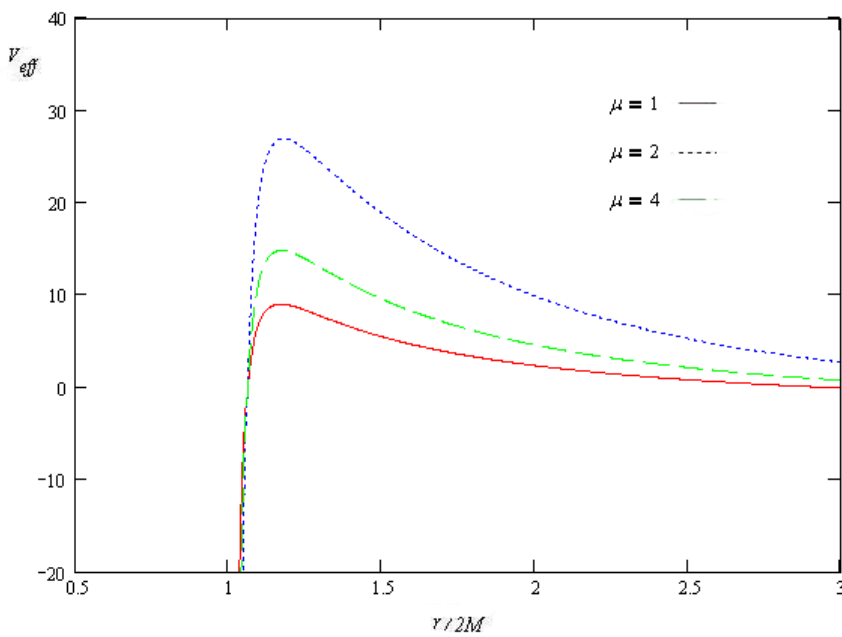
$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = & \frac{r_h r^2 \left\{1 + \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{1-\delta}\right\} - r^2}{\left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{2(1+\delta)} \left\{\mathcal{L} + \frac{2e\mu}{r} - r^2 \left(\mathcal{E} + \frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3}\right) \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{-2(1+\delta)} \omega(r)\right\}^2} \\ & \times \left[\left(\mathcal{L} - r + \frac{2e\mu}{r}\right) \left(\mathcal{L} + r + \frac{2e\mu}{r}\right) \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{2(1+\delta)} \right. \\ & \left. - r^2 \left(\mathcal{E} + \frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3}\right) \left(\frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} + \frac{4e\mu}{r} \omega(r) + \mathcal{E} + 2\mathcal{L}\omega(r)\right) \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Интегрировать уравнение (2.16) в общем виде почти невозможно. Однако можно получить форму траектории пробной частицы с помощью некоторых предположений и численного интегрирования. Рисунок 2.2 иллюстрирует форму траектории заряженной частицы, начинающей свое движение с достаточно далекого расстояния в направлении медленно вращающегося центрального объекта при различных значениях малого параметра δ и с нулевым угловым импульсом частицы в бесконечности. Из представленного рисунка 2.2 видно, что увеличение параметра δ делает гравитационное поле центрального объекта более значительным, оно сильнее притягивает пробные частицы, которые при этом располагаются ближе к центральному объекту.

Радиальное движение заряженной частицы вокруг медленно вращающейся намагниченной КН может быть описано с помощью следующего уравне-



а)



б)

Рис. 2.1: Радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженных частиц вблизи намагниченной КН а) для различных значений параметра δ и б) для различных значений магнитного дипольного момента μ .

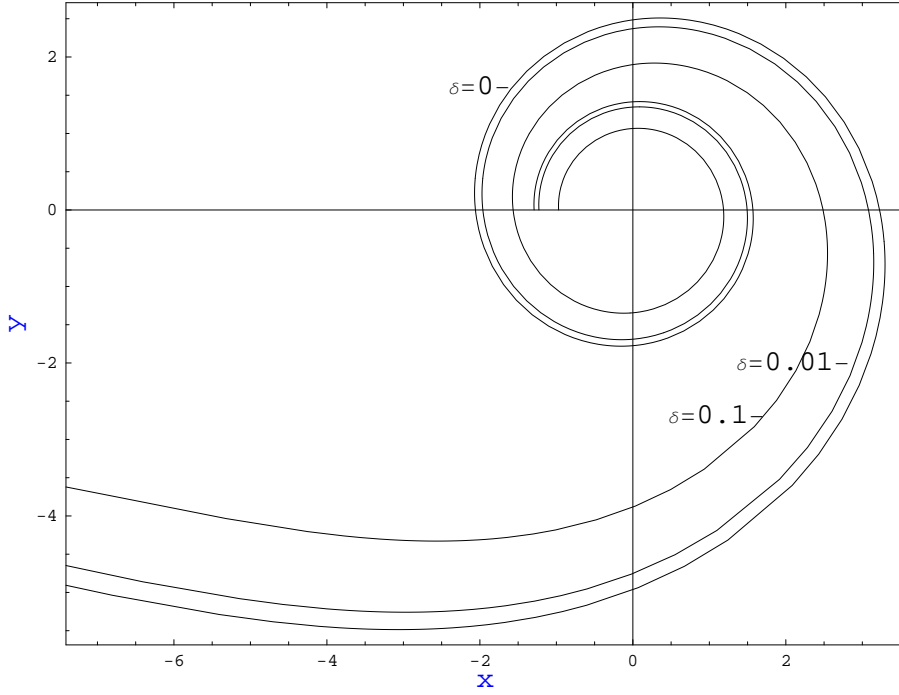


Рис. 2.2: Форма траектории заряженных частиц вокруг намагниченной КН для различных значений параметра δ .

ния, полученного из (2.13):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = & \frac{r_h \left\{ 1 + \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{1-\delta} \right\} - 1}{\left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{-2(1+\delta)} \left\{ r \left(\frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} + \frac{2e\mu}{r} \omega(r) \right) + r [E + L\omega(r)] \right\}^2} \\ & \times \left[\left(\mathcal{L} - r + \frac{2e\mu}{r} \right) \left(\mathcal{L} + r + \frac{2e\mu}{r} \right) \left(1 - \frac{r_h}{r}\right)^{2(1+\delta)} \right. \\ & \left. - r^2 \left(\mathcal{E} + \frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} \right) \left(\frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} + \frac{4e\mu}{r} \omega(r) + \mathcal{E} + 2\mathcal{L}\omega(r) \right) \right]. \quad (2.17) \end{aligned}$$

В работе [93] из решения радиального уравнения движения частиц в сферически - симметричном пространстве - времени намагниченной КН было показано, что частицы могут осуществлять радиальные гармонические колебания. Здесь, из уравнения (2.17), видно, что в случае намагниченной медленно вращающейся КН заряженные частицы совершают ангармонические радиальные колебания. Периоды этих колебаний представлены в таблице 2.1 для разных значений магнитного параметра и параметра δ .

Таблица 2.1: Периоды радиальных колебаний заряженной частицы вокруг медленно вращающейся намагниченной КН в зависимости от μ и δ .

δ	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1
$\mu = 4$	4.02782	4.07698	4.11094	4.21451	4.39281
$\mu = 6$	4.41272	4.46564	4.52357	4.69716	4.9919
$\mu = 12$	4.93646	4.99437	5.05869	5.25325	5.58609
$\mu = 20$	5.22254	5.28301	5.35083	5.55727	5.91227

Исследуем теперь периоды круговых орбит движения заряженных частиц вокруг медленно вращающейся намагниченной КН (стабильность круговой орбиты будет обсуждаться в следующем подразделе) с помощью следующего уравнения, полученного из (2.13):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left\{(\mathcal{L} + \frac{2e\mu}{r})(1 - \frac{r_h}{r})^{2(1+\delta)} - r^2(\mathcal{E} + \frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3})\omega(r)\right\}^2}{r^4 \left\{\left(\frac{e\mu\Omega r_0^2}{3r^3} + \mathcal{E}\right) + \left[\frac{2e\mu}{r} + \mathcal{L}\right]\omega(r)\right\}^2}. \quad (2.18)$$

На рисунке 2.3 показана зависимость периодов кругового движения частиц от магнитного дипольного момента КН для различных значений малого параметра δ . Графики подтверждают утверждение, что увеличение параметра δ притягивает частицы ближе к центральному объекту.

2.4 Стабильные круговые орбиты заряженных частиц

Особый интерес для теории аккреции пробной частицы вокруг медленно вращающейся КН с дипольным электромагнитным полем связан с изучением круговой орбиты в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, когда производная $dr/d\sigma$ равна нулю. При этом правая сторона уравнения (2.14) обращается в нуль:

$$\mathcal{E}^2 - V_{eff}^2(r, \mu, \Omega, \chi, r_0, r_h, \delta, \mathcal{E}, \mathcal{L}) = 0, \quad (2.19)$$

вместе со своей первой производной по r

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0. \quad (2.20)$$

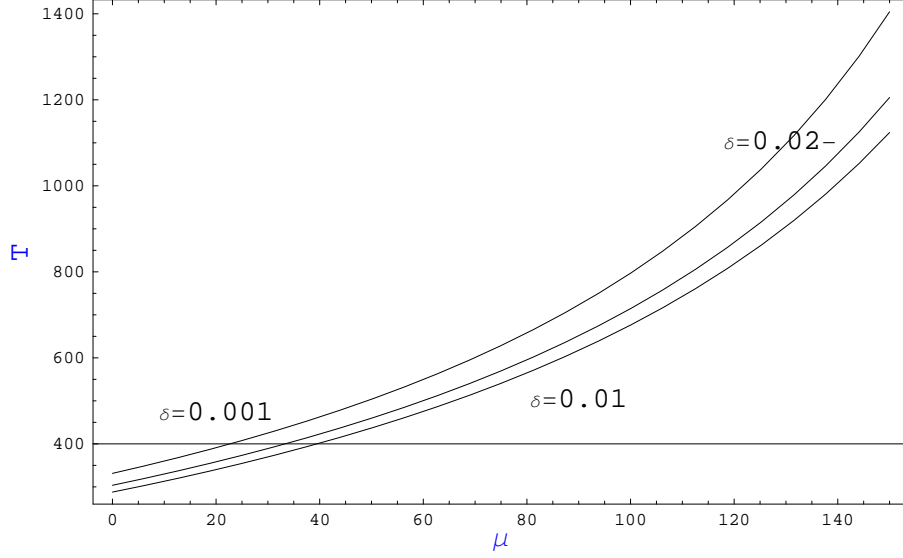


Рис. 2.3: Зависимость периода движения заряженных частиц вокруг КН от магнитного дипольного момента центрального объекта для различных значений параметра δ .

Радиус ближайшей стабильной круговой орбиты, соответствующей связанной энергии и момента импульса могут быть получены с использованием условия:

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} = 0 . \quad (2.21)$$

Из уравнений (2.19) и (2.20) можно найти выражение для энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = e\gamma C_0(1 - \tilde{t})^3 \pm \left([e\gamma C_0(1 - \tilde{t})^3 + \omega r_h \kappa(1 \pm \alpha)]^2 \right. \\ \left. - \gamma \left[1 - (1 - \tilde{t})^2 \kappa^2 (1 \pm \alpha)^2 \right] \right)^{1/2} + \omega r_h \kappa (1 \pm \alpha) \end{aligned} \quad (2.22)$$

и выражение для момента

$$\mathcal{L} = -eC_3(1 - \tilde{t}) + r_h \kappa (1 \pm \alpha) \quad (2.23)$$

заряженной пробной частицы. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\tilde{t} = \frac{r_h}{r_0}, \quad \alpha = \left(1 - \frac{\beta r_h}{\kappa C_3} \right)^{1/2}, \quad \kappa = \frac{C_3 \ln \tilde{t}}{1 + \ln \tilde{t} - 3\tilde{t} - 6\tilde{t} \ln \tilde{t}},$$

$$\beta = \frac{(1 + 2 \ln \tilde{t})\tilde{t} - 1 - \ln \tilde{t}}{\ln \tilde{t}}, \quad C_3 = \frac{2e\mu \cos \chi}{r_h},$$

и

$$\gamma^{-1} = 4\tilde{t}^2 \delta \ln \tilde{t}.$$

Теперь, подставляя (2.22) и (2.23) в уравнение (2.21), можно получить основное уравнение

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}r^3 \left[-4C_3\lambda + \mathcal{L}(r - 7\lambda)\frac{r}{r_h} \right] + r \left[\frac{2C_1}{r_h}\lambda^2 + \frac{r^5}{r_h}(3\lambda - r) - 4\delta\mathcal{E}\lambda^2 \right. \\ & \times (\mathcal{E}r^3 - 2\eta\mathcal{L}) \left. \right] - 2\lambda \left[2C_3 \left\{ 4\delta\mathcal{E}\eta\lambda^2 + \mathcal{L}(r - 4\lambda)\frac{r^3}{r_h} \right\} - C_3^2\lambda r^2 \right. \\ & + \frac{r}{r_h} \left\{ C_1 \frac{13\lambda - 5r}{r_h}\lambda - r^6 + \mathcal{L}^2 \frac{6\lambda - 3r}{r_h}r^3 + 2\delta\mathcal{E}\lambda [\mathcal{E}(5r - 7\lambda)r^3 \right. \\ & \left. + 2\eta\mathcal{L}(13\lambda - 5r)] \right\} \left. \right] \ln \frac{\lambda}{r} + 4\delta\mathcal{E}\lambda^2 r_h \left[2C_3\eta\lambda \frac{4\lambda - 3r}{r_h^2} \right. \\ & \left. + 3r \left(\mathcal{E}r^3 \frac{2\lambda - r}{r_h^2} + C_0\varsigma + 2\eta\mathcal{L}\varsigma \right) \right] \ln^2 \frac{\lambda}{r} = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где мы использовали следующие обозначения:

$$\begin{aligned} r - r_h &= \lambda, & \eta &= 4Mr_0^2\Omega/5, & C_0 &= -e\mu\Omega r_0^2 \cos \chi / 3r_h^3 \\ \varsigma &= 7r_h^2 - 8r_h r + 2r^2 & \text{and} & & C_1 &= 2C_0\delta\mathcal{E}r_h^4. \end{aligned}$$

Численное решение уравнения (2.24) определяет радиус минимальной стабильной круговой орбиты (СКО) для медленно вращающейся КН с магнитным дипольным моментом, как функцию от параметра δ , угловой скорости Ω , а также магнитного дипольного момента источника μ . В таблице 2.2 приведено численное решение для радиусов стабильной круговой орбиты заряженных пробных частиц для различных значений параметра δ и магнитного дипольного момента μ КН. С увеличением δ радиусы СКО перемещаются в сторону наблюдателя на бесконечности, в то время как наличие магнитного дипольного момента и его возможное увеличение смещает орбиты в сторону гравитационного источника.

Таблица 2.2: Стабильные орбиты пробных частиц вблизи медленно вращающейся намагниченной КН в зависимости от параметров μ и δ .

δ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$\mu = 0.3$	7.81538	9.31114	10.3082	11.0739	11.7021
$\mu = 0.7$	6.31054	7.52564	8.34287	8.97572	9.49905
$\mu = 2$	4.86001	5.79180	6.41939	6.90621	7.30947
$\mu = 5$	3.90299	4.64910	5.15093	5.53995	5.86208
$\mu = 13$	3.18162	3.79127	4.19940	4.51495	4.77577
$\mu = 21$	2.93889	3.50249	3.87818	4.16793	4.40702

2.5 Электромагнитное поле медленно вращающегося намагниченного гравастара

Найдем внутреннее электромагнитное поле внутри оболочки гравастара, создаваемое идеальной высоконамагниченной жидкостью с бесконечной проводимостью. Предполагается, что дипольное магнитное поле гравастара создается за счет кругового симметричного тока, находящегося на радиусе a в экваториальной плоскости.

Метрика, описывающая пространство-время сферически-симметричного медленно вращающегося гравастара, может быть записана в следующем виде (см., например, [37, 38, 94]):

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + A^{-2}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2\omega(r)r^2 \sin^2 \theta d\varphi dt \quad (2.25)$$

где r - радиальная координата, $\omega(r)$ - угловая скорость увлечения ИСО вокруг медленно вращающегося гравастара, и здесь

$$A^2(r) = \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}, & r > r_a(\tau), \\ 1 - \frac{r^2}{R^2}, & r < r_a(\tau). \end{cases}$$

где $r = r_a(\tau)$ - времениподобная гиперповерхность, на которой находится бесконечно тонкая оболочка, а τ обозначает собственное время тонкой оболочки и постоянная $R = \sqrt{r_a^3/2M}$.

Круговой ток I и пространственный заряд q симметрично расположены в экваториальной плоскости медленно вращающегося гравастара, компоненты

плотности тока равны (см. [17]):

$$J^{\hat{t}} = \frac{qA}{2\pi r_a^2} \delta(r - r_a) \delta(\cos \theta) , \quad (2.26)$$

$$J^{\hat{r}} = J^{\hat{\theta}} = 0 , \quad (2.27)$$

$$J^{\hat{\phi}} = \frac{Ir \sin \theta}{2\pi r_a^2} \delta(r - r_a) \delta(\cos \theta) , \quad (2.28)$$

Гравастар медленно вращается с 4-скоростью:

$$w^\alpha \equiv \frac{1}{A} (1, 0, 0, \Omega) , \quad w_\alpha \equiv A \left(-1, 0, 0, \frac{\bar{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A^2} \right) , \quad (2.29)$$

где $\bar{\omega} = \Omega - \omega$, Ω – угловая скорость вращения гравастара.

Перейдем к поиску внутреннего решения уравнений Максвелла в пространстве-времени (2.25), учитывая условие, что магнитное поле звезды дипольное, в виде:

$$B^{\hat{r}}(r, \theta) = F(r) \cos \theta , \quad (2.30)$$

$$B^{\hat{\theta}}(r, \theta) = G(r) \sin \theta , \quad (2.31)$$

$$B^{\hat{\phi}}(r, \theta) = 0 , \quad (2.32)$$

где функции $F(r)$ и $G(r)$ можно рассматривать как релятивистские поправки за счет искривления пространства ([62]).

Уравнения Максвелла с анзацами (2.30)–(2.32), можно привести к следующему набору уравнений

$$(r^2 F)_{,r} + 2rG/A = 0 , \quad (2.33)$$

$$(rAG)_{,r} + F = 0 . \quad (2.34)$$

Заметим первый важный результат в системе уравнений (2.33)–(2.34). В случае стационарных электромагнитных полей релятивистский эффект увлечения ИСО и гравитомагнитный заряд не вводят поправку к радиальным собственным функциям магнитного поля. Иными словами, в случае бесконечной проводимости исследование уравнений Максвелла в медленно вращающейся метрике не дает никакой дополнительной информации по сравнению с невращающейся метрикой. Поэтому зависимость от угловой скорости увлечения ИСО появится в $\mathcal{O}(\omega^2)$.

Стационарное вакуумное внешнее магнитное поле намагниченной релятивистской звезды хорошо известно и имеет следующий вид [13]

$$B_{\text{ex}}^{\hat{r}}(r, \theta) = -\frac{3\mu}{4M^3} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right] \cos \theta, \quad (2.35)$$

$$B_{\text{ex}}^{\hat{\theta}}(r, \theta) = \frac{3\mu N}{4M^2 r} \left[\frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] \sin \theta, \quad (2.36)$$

где $\mu = \pi r_a^2 (1 - 2M/r_a)^{1/2} I$ и $N = (1 - 2M/r)^{1/2}$ - функция длительности.

Внутреннее решение для магнитного поля имеет вид

$$B^{\hat{r}}(r, \theta) = -\frac{3\mu r_a^3}{4r^3 M^3} \left[\ln N_a^2 + \frac{2M}{r_a} \left(1 + \frac{M}{r_a} \right) \right] \frac{\frac{r}{R} - \operatorname{arctanh} \frac{r}{R}}{\frac{r_a}{R} - \operatorname{arctanh} \frac{r_a}{R}} \cos \theta, \quad (2.37)$$

$$B^{\hat{\theta}}(r, \theta) = \frac{3\mu r_a^2 L N_a}{4r^3 L_a M^2} \left[\frac{r_a}{M} \ln N_a^2 + \frac{1}{3N_a^2} - \frac{2N_a^2}{3} + \frac{7}{3} \right] \times \frac{\frac{r}{RL^2} - \operatorname{arctanh} \frac{r}{R}}{\frac{r_a}{RL_a^2} - \operatorname{arctanh} \frac{r_a}{R}} \sin \theta, \quad (2.38)$$

где $L = (1 - r^2/R^2)^{1/2}$ и подстрочный знак a указывает на значения, измеряемые при $r = r_a$. Значение постоянной интегрирования определяется из условия непрерывности радиального магнитного поля при прохождении через поверхность гравастара, то есть из условия, что $[B_a^{\hat{r}}]_{\text{in}} = [B_a^{\hat{r}}]_{\text{ext}}$, граничные условия для тангенциального магнитного поля $[B_a^{\hat{\theta}}]_{\text{ext}} - [B_a^{\hat{\theta}}]_{\text{in}} = 4\pi i_a^{\hat{\phi}}$, где \mathbf{i} - плотность поверхностного тока при $r = a$. Радиальная зависимость магнитного поля гравастара (2.35)–(2.38) показана на рис. 2.4. Из рисунка видно, что внутреннее магнитное поле внутри оболочки увеличивается до границы r_a (здесь $r_a/M = 2.1$), которая обозначена вертикальной пунктирной линией. Азимутальная составляющая магнитного поля претерпевает разрыв на границе гравастара. Внешнее магнитное поле гравастара убывает как $1/r^3$.

Внутреннее электрическое поле

$$E^{\hat{r}}(r, \theta) = \frac{\bar{\omega} r \sin \theta}{cL} B^{\hat{\theta}}(r, \theta), \quad (2.39)$$

$$E^{\hat{\theta}}(r, \theta) = -\frac{\bar{\omega} r \sin \theta}{cL} B^{\hat{r}}(r, \theta). \quad (2.40)$$

можно найти из условия бесконечной проводимости σ в законе Ома для тока проводимости $j^{\hat{\alpha}}$, используя выражения для скорости вращения $v^{\hat{\phi}}$ и магнит-

ного поля (2.37), (2.38):

$$j^{\hat{r}} = \sigma \left[E^{\hat{r}} + A^{-1} \left(v^{\hat{\theta}} B^{\hat{\varphi}} - v^{\hat{\varphi}} B^{\hat{\theta}} \right) \right] , \quad (2.41)$$

$$j^{\hat{\theta}} = \sigma \left[E^{\hat{\theta}} + A^{-1} \left(v^{\hat{\varphi}} B^{\hat{r}} - v^{\hat{r}} B^{\hat{\varphi}} \right) \right] , \quad (2.42)$$

$$j^{\hat{\varphi}} = \sigma \left[E^{\hat{\varphi}} + A^{-1} \left(v^{\hat{r}} B^{\hat{\theta}} - v^{\hat{\theta}} B^{\hat{r}} \right) \right] . \quad (2.43)$$

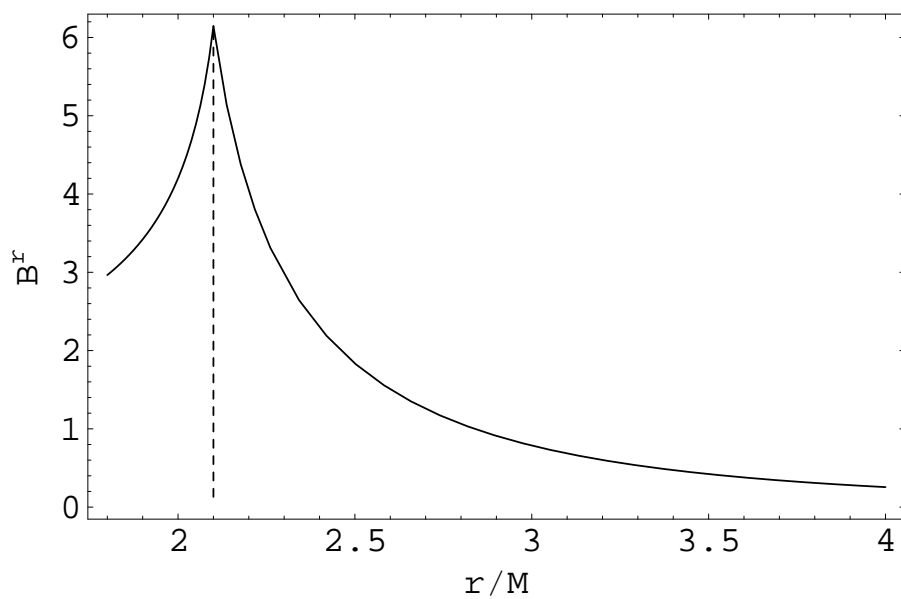
Внешнее электрическое поле медленно вращающегося гравастара совпадает с электрическим полем вращающейся НЗ и уравнениями (124)–(126) в статье [62].

2.6 Выводы

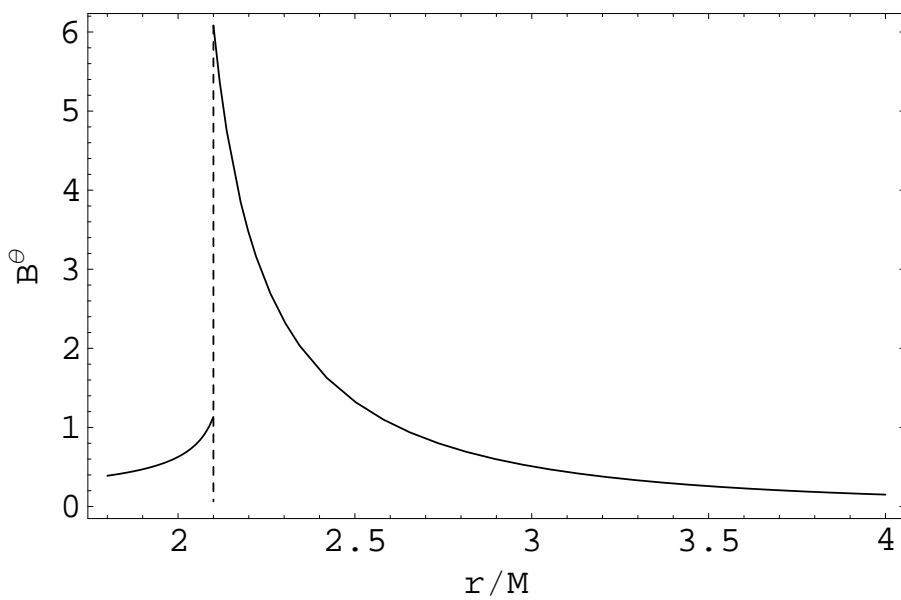
В данной главе исследована электромагнитное поле медленно вращающейся КН, т.е., пренебрегая квадратичным членом и членами высшего порядка по угловой скорости, нами впервые найдено точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве-времени медленно вращающейся намагниченной КН. В работе [87] было показано, что электрический заряд КН может существовать, и существование электрического заряда не сильно изменяет структуру пространства-времени вокруг КН. Это дает нам право рассматривать наличие магнитного дипольного момента КН, генерированного за счет возможного движения электрического заряда.

Физические процессы и эффекты вокруг ЧД и КН в различных моделях отличаются такими свойствами, как отсутствие события горизонта у КН, прохождение электромагнитного излучения и частиц сквозь КН, появление эффекта синего смещения в дополнение к эффекту гравитационного красного смещения вблизи КН и т.д. (см. подробности [27, 92]). В работе [91] были изучены круговые орбиты пробных частиц вокруг КН и их периоды. Здесь эти результаты обобщены на движение заряженных частиц и показана сильная зависимость движения частиц от формы параметра КН δ и магнитного поля.

Получены выражения для компонент дипольного магнитного поля гравастара, которое образуется за счет кругового тока, симметрично текущего по окружности радиуса a в экваториальной плоскости. Выражение для магнитного поля гравастара может быть полезным при описании различных физических процессов в гравастаре.



a)



б)

Рис. 2.4: Зависимость радиальной (а) и азимутальной (б) компоненты магнитного поля гравастара от радиуса.

ГЛАВА 3. Электромагнитные поля и движение частиц вокруг вращающихся намагниченных компактных объектов на бранах

3.1 Введение

Хорошо известно, что магнитные поля играют значительную роль в физике большинства астрофизических объектов, особенно компактных релятивистских звезд, которые обладают поверхностными магнитными полями порядка 10^{12} Гс. Магнитные поля магнитаров [95, 96] могут достигать 10^{15} Гс. Напряженность магнитного поля компактных звезд является одной из основных величин, которые определяют их наблюдаемость; пульсары, к примеру, наблюдаются через магнито-дипольное излучение. Поэтому изучение влияния различных явлений на форму внутренних и внешних магнитных полей звезд является чрезвычайно важным.

Насколько нам известно, эффект напряженности брана на конфигурацию магнитного поля вращающихся релятивистских компактных звезд еще не был изучен. Поскольку магнитное поле определяет многие наблюдаемые величины компактных звезд, будем здесь исследовать эффекты брана на звездные магнитные поля.

Выражения для внешних электромагнитных полей вокруг намагниченных вращающихся сфер в рамках ньютоновской теории приведены в классической статье Дойча [57]. Внутренние поля также были изучены многими авторами (см., например, [97]). Общерелятивистский подход к изучению структуры магнитного поля во внешней области вокруг компактных гравитационных объектов был впервые применен в работе Гинзбурга и Озер-

ного [13] и далее был расширен многими авторами [77, 98, 99, 100]. В статьях [101, 102, 103, 104, 105] было рассмотрено магнитное поле внутри релятивистской звезды для различных моделей звездного вещества. Применение общерелятивистского подхода к рассмотрению структуры внешних и внутренних звездных магнитных полей, включающее численные расчеты, показывает, что магнитное поле усиливается за счет монополярной части гравитационного поля в зависимости от компактности релятивистской звезды.

Рассмотрим здесь аксиально-симметричные звезды на бранах, обладающие сильными магнитными полями. Структура магнитного поля предполагается дипольной и осесимметричной. Нами не учитывается эффект обратного влияния структуры магнитного поля на метрику пространства-времени звезды в связи с тем, что энергия магнитного поля недостаточно велика, чтобы влиять на геометрию пространства-времени. Нами будет найдено точное аналитическое внутреннее решение уравнений Максвелла для магнитного поля в случае, когда звездное вещество имеет нереалистичное уравнение состояния (УС) жесткого вещества. В случае, когда вещество звезды имеет постоянную плотность, внутренние поля будут найдены численно из уравнений Максвелла. Внешние магнитные поля также находятся численно. Покажем, что как внешние, так и внутренние магнитные поля будут существенно модифицированы 5-мерными гравитационными эффектами.

На протяжении последних лет в литературе широко обсуждаются вопросы, связанные с возможностью наблюдательной проверки модели ЧД на бранах, к примеру, через эффекты гравитационного линзирования [51, 106, 107, 108, 109, 110], движение пробных частиц [54] и классические тесты ОТО (прецессия перигелия, отклонение света и задержка радиолокационных волн) в Солнечной системе [111]. Была также изучена роль бран заряда в орбитальных моделях высокочастотных квазипериодических осцилляций, наблюдаемых у НЗ в двойных системах [112]. В работе [113] были получены выражения для потока энергии, спектра и эффективности аккреции аккреционного диска вокруг нескольких классов статических и вращающихся ЧД на бранах. В одной из последних работ [114] представлен полный набор аналитических

решений уравнений геодезических для пробных частиц с ненулевой массой покоя в многомерных пространствах, который может быть использован при изучении модели на бранах.

Бран корректировки для возмущений электромагнитного потенциала вокруг заряженной вращающейся ЧД были исследованы в работах [55, 56]. Работа [115] посвящена рассмотрению конфигурации магнитного поля релятивистских звезд в зависимости от бран напряженности. Здесь исследуется структура электромагнитного поля и движение частиц вокруг вращающейся ЧД на бранах, помещенной в однородное магнитное поле. Исследование орбит частиц дает возможность определить разрешенные пределы для некоторых параметров метрики пространства-времени, а также обеспечивает более глубокое понимание физической природы и свойств метрики соответствующего пространства. Таким образом, рассматриваемые эффекты дают возможность проверки модели на бранах путем астрономических и астрофизических наблюдений ЧД. В частности, наблюдательно измеряемый радиус СКО вокруг ЧД, в принципе, может дать определенные значения для верхнего предела численного значения бран заряда.

Глава организована следующим образом. В параграфе 3.2 приведем описание сферических компактных объектов на бранах и основные уравнения Максвелла в пространстве-времени этих объектов. В параграфе 3.3 рассмотрим основные предположения, обсудим граничные и начальные условия для магнитных полей, а также обсудим внутренние магнитные поля для различных УС. В пунктах в параграфе найдем точное аналитическое решение для звезд, описываемых УС жесткого вещества, проинтегрируем уравнения Максвелла во внешнем пространстве-времени от поверхности звезды до бесконечности и найдем численные решения для магнитного поля вокруг звезды на бранах, численно проинтегрируем уравнения для внутреннего магнитного поля от поверхности звезды до некоторого внутреннего радиуса. В качестве астрофизического применения полученных результатов, в параграфе 3.4 найдено изменение яркости электромагнитного магнито-дипольного излучения вращающейся звезды из-за эффекта брана. В параграфе 3.5 приведем

точные решения вакуумных уравнений Максвелла в пространстве-времени вращающейся ЧД на бранах, помещенной в однородное магнитное поле. В следующем параграфе 3.6 будет изучено движение заряженных частиц вокруг ЧД на бранах в однородном магнитном поле в приближении медленного вращения. Будет получено выражение для эффективного потенциала частиц с заданным моментом импульса, движущихся по круговым орбитам вокруг ЧД, в виде функции магнитного поля и бран параметра ЧД. В параграфе 3.7 будет найдено точное выражение для радиуса стабильной круговой орбиты пробной частицы, движущейся в экваториальной плоскости ЧД на бранах, в зависимости от бран заряда. При этом для простоты расчетов нами не учитываются вращение и магнитный параметр ЧД. Будут приведены рисунки, на которых изображены формы траекторий пробных частиц, движущихся вокруг ЧД на бранах. Заключение и обсуждение полученных результатов будет приведено в разделе 3.8.

3.2 Метрика пространства-времени медленно вращающейся сферической звезды на бранах

Модель Вселенной на бранах предполагает, что наше 4-мерное пространство является "срезом" более общего пятимерного. Согласно этой модели, только гравитационное взаимодействие способно свободно распространяться в 5-мерном пространстве, в то время как другие виды взаимодействий "заперты" в 4-мерной Вселенной. Трудности анализа уравнений гравитационного поля и гравитационного коллапса в рамках модели на бранах связаны с тем, что распространение гравитационного взаимодействия в 5-мерном пространстве не позволяет записывать уравнения для гравитационного поля 4-мерного пространства-времени в закрытой форме [47].

Метрика пространства-времени вокруг вращающегося компактного объекта на бранах может быть записана в координатах u, r, θ, φ в виде

$$ds^2 = [-(du + dr)^2 + dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + G(du - a \sin^2 \theta d\varphi)^2] , \quad (3.1)$$

где $G = (2Mr - Q^*)/\Sigma$, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, Q^* - заряд бран, M - масса звезды,

величина a связана с угловым моментом звезды. Применяя преобразования Бойера-Линдквиста $du = dt - (r^2 + a^2)dr/\Delta$, $d\varphi = d\phi - adr/\Delta$ с $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^*$ и предполагая, что параметр вращения a мал, можно получить внешнюю метрику для медленно вращающейся НЗ на бранах в форме

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + H^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2(1 - A^2)a \sin^2 \theta dt d\phi . \quad (3.2)$$

Здесь

$$A^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right) = H^{-2}(r), \quad r > R , \quad (3.3)$$

точное решение типа Райсснера – Нордстрема для внешней метрики звезды.

Используя выражение для угловой скорости вращения звезды $\omega = 2Ma/r^3$, можно привести метрику к следующему виду

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + H^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\tilde{\omega}(r)r^2 \sin^2 \theta dt d\phi , \quad (3.4)$$

где $\tilde{\omega}(r) = \omega(1 - Q^*/2rM)$.

3.3 Стационарные решения уравнений Максвелла

Прежде чем мы рассмотрим стационарные решения уравнений Максвелла (см. Приложение В.), необходимо сделать некоторые предположения относительно модели звезды.

1. Предположим, что магнитный момент звезд не меняется со временем в связи с бесконечной проводимостью звездного вещества. Характерное значение для времени затухания магнитного поля НЗ имеет вид $\tau_\sigma \equiv 4\pi\sigma R^2/c^2$. Используя приближенное выражение для электрической проводимости [116]

$$\tilde{\sigma} \approx 10^{26} \left(\frac{10^8 K}{T}\right)^2 \left(\frac{\rho}{10^{14} g \cdot cm^{-3}}\right)^{3/4} c^{-1} , \quad (3.5)$$

получим время затухания магнитного поля порядка $\sim 10^{10}$ лет для типичной проводимости $\tilde{\sigma} \sim 10^{26} c^{-1}$ звездной коры.

2. Из-за различного поведения и разрывности полей поверхности сферы будем называть внутренними решениями те решения, которые действительны в радиальном диапазоне $R_{IN} \leq r \leq R$, и внешними решениями те, которые действительны в диапазоне $R < r \leq \infty$. Ограничивая решение некоторым

внутренним радиусом R_{IN} устраним проблему граничных условий для $r \rightarrow 0$, тем самым признавая неизвестность свойств магнитных полей во внутренних сверхпроводящих регионах компактных релятивистских объектов, таких как НЗ.

3. Предполагая, что магнитное поле является дипольным, ищем решения уравнений Максвелла (D.1)–(D.4) и (D.5)–(D.8) (см. Приложение D) в форме (2.30)–(2.32) где неизвестные радиальные функции $F(r)$ и $G(r)$ отвечают за релятивистские поправки, связанные с гравитационной массой и напряженностью брана. Магнитное поле зависит только от координат r и θ в связи с осевой симметрией и стационарностью. Дипольное приближение для внутреннего поля является простым, однако оно хорошо согласуется с требованием о том, что конфигурация поля должна совпадать на границе с внешним дипольным полем. Поскольку внутреннее магнитное поле имеет дипольную конфигурацию, требуется также непрерывность нормальных и тангенциальных компонент магнитного поля на поверхности звезды.

4. Поскольку внутренняя часть звезды рассматривается как идеальный проводник, а внешнюю часть как вакуум на бране, мы можем положить $J^{\hat{r}} = J^{\hat{\theta}} = J^{\hat{\phi}} = 0$ в уравнениях Максвелла (D.1), (D.6)–(D.8) и получить уравнения Максвелла для радиальной части магнитного поля в виде

$$(r^2 F)_{,r} + 2HrG = 0 , \quad (3.6)$$

$$(rAG)_{,r} + AHF = 0 . \quad (3.7)$$

5. Предположение о постоянстве плотности вещества внутри звезды, принятое в пункте 2.6, не является физически обоснованным. Однако для неэкзотических УС [117] изменение плотности наблюдается лишь приблизительно в трех четвертях объема НЗ. В будущем для улучшения звездной модели может быть рассмотрено политропное УС.

Рассмотрим стационарные решения уравнений Максвелла, т.е. решения, в которых предполагается, что магнитный момент звезды не меняется со временем по причине бесконечной проводимости вещества звезды.

Частный случай монополярной конфигурации магнитного поля медленно вращающейся звезды на бранах

Первым делом рассмотрим следующую конфигурацию магнитного поля в качестве простейшей модели

$$B^{\hat{r}} = B^{\hat{r}}(r) \neq 0, \quad B^{\hat{\theta}} = 0. \quad (3.8)$$

Несмотря на то, что такая форма магнитного поля не может быть реалистичной, мы можем получить с ее помощью первичные оценки влияния бран заряда на электромагнитное поле звезды. В этом случае, в линейном приближении по частоте Лензе-Тирринга ω , уравнения Максвелла (D.1) и (D.8) сводятся к уравнениям

$$(r^2 B^{\hat{r}})_{,r} = 0 \quad B^{\hat{\theta}}_{,\theta} = 0. \quad (3.9)$$

Решение, допускаемое этими уравнениями, имеет вид

$$B^{\hat{r}} = \frac{\mu}{r^2}, \quad (3.10)$$

где μ - константа интегрирования.

Электрическое поле, создаваемое монополярным магнитным полем, определяется следующими уравнениями Максвелла

$$A H E^{\hat{r}}_{,\theta} - (r A E^{\hat{\theta}})_{,r} = 0, \quad (3.11)$$

$$\sin \theta (r^2 E^{\hat{r}})_{,r} + H r (\sin \theta E^{\hat{\theta}})_{,\theta} + \left[\frac{H \tilde{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A} B^{\hat{r}} \right]_{,\theta} = 0. \quad (3.12)$$

Так как внутри звезды $E \sim (v \times B)$ (электрическая проводимость обращается в бесконечность), можно легко увидеть, что для выбранной конфигурации магнитного поля

$$E^{\hat{\theta}} \neq 0, \quad E^{\hat{r}} = E^{\hat{\phi}} = 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, уравнения для $E^{\hat{\theta}}$ будут выглядеть следующим образом

$$r A E^{\hat{\theta}} = f(\theta), \quad (3.14)$$

$$r (\sin \theta E^{\hat{\theta}})_{,\theta} + \frac{2\tilde{\mu}}{A} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (3.15)$$

Из уравнения (3.15) можно получить следующее выражение для $E^{\hat{\theta}}$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\tilde{\omega}\mu}{rA} \cos^2 \theta + C \right) , \quad (3.16)$$

где C есть константа интегрирования, которая находится из граничных условий на поверхности звезды.

Внутреннее аналитическое решение

Система уравнений (3.6)–(3.7) может быть решена для магнитного поля, соответствующего звездной структуре и магнитной конфигурации некоторых астрофизических объектов. (Такой подход применен, к примеру, в работе Гупта и др. [101] для случая внутренних дипольных магнитных полей).

Кроме того, можно заранее определять конфигурацию магнитного поля и искать соответствующее УС для заданной структуры. В данном случае самыми простыми из возможных решений системы (3.6)–(3.7), являются те, для которых магнитное поле постоянно по всему объему интересующей нас звезды. В этом случае

$$F = \frac{C_4}{R^3} \mu , \quad G = -\frac{H^{-1}C_4}{R^3} \mu = -H^{-1}F , \quad (3.17)$$

где C_4 является произвольной постоянной, значение которой может быть определено из требования непрерывности радиального магнитного поля $B^{\hat{r}}$ при прохождении через поверхность звезды, а μ - магнитный момент.

Теперь можно проверить, возможно ли решение (3.17) физически или нет. Использование (3.17) в уравнении (3.7) требует, чтобы метрические функции удовлетворяли условиям

$$(rAH^{-1})_{,r} - AH = 0 . \quad (3.18)$$

Уравнения Эйнштейна для сферической звезды на бранах дают

$$H^2(r) = \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} , \quad (3.19)$$

где функция текущей массы имеет вид

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho^{eff}(r)r^2 dr , \quad r \leq R , \quad (3.20)$$

полная эффективная плотность энергии равна

$$\rho^{eff} = \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right) + \frac{6}{\kappa^4 \lambda} U \quad (3.21)$$

и $\kappa = 8\pi$. Учитывая уравнение (3.19) и уравнения гравитационного поля, предполагаем, что

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho^{eff} . \quad (3.22)$$

Тогда уравнение для гравитационного поля в соответствии с (3.19) может быть записано в форме

$$\frac{A'}{A} = \frac{m(r) + 4\pi \left(p^{eff} + \frac{4}{\kappa^4 \lambda} P \right) r^3}{r(r - 2M)} . \quad (3.23)$$

Подставляя уравнение (3.23) в уравнение поля, можно исключить A'/A и получить модифицированное уравнение Толмана-Оппенгеймера-Волкова для гидростатического равновесия [118, 119, 120]

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho + p) \left[m(r) + 4\pi \left(p^{eff} + \frac{4}{\kappa^4 \lambda} P \right) r^3 \right]}{r(r - 2M)} . \quad (3.24)$$

С другой стороны, из уравнения Максвелла (3.18) с помощью полученных выражений (3.19) и (3.22) можно получить следующее выражение для гидростатического равновесия

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho + p) (m(r) + 4\pi \rho^{eff} r^3)}{r(r - 2M)} , \quad (3.25)$$

модифицированное наличием напряженности брана. Поскольку геометрия является регулярной в $r = 0$, это означает, что внутреннее граничное условие (3.22) имеет вид $m_{r=0} = 0$, а для уравнения (3.25) центральное давление $p_{r=0} = p_c$ определяется через УС $p = p(\rho)$ с центральной плотностью ρ_c , которая взята в качестве свободного параметра [104].

Сопоставление уравнений (3.24) и (3.25) дает следующее УС для звезды с постоянной плотностью магнитного поля (3.17)

$$\rho^{eff} = p^{eff} + \frac{4}{\kappa^4 \lambda} P . \quad (3.26)$$

Предполагая, что $P = 0$, получим нереалистичные экзотические УС $\rho^{eff} = p^{eff}$ для жестких сред.

Внешнее численное решение

Внешнее решение для магнитного поля упрощается, поскольку известны явные аналитические выражения для метрических функций A и H . В частности, с помощью определений $N \equiv A = H^{-1} = (1 - 2M/r + Q^*/r^2)^{1/2}$ система (3.6)–(3.7) может быть записана как одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции F :

$$\frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} \right) \frac{d}{dr} (r^2 F) \right] - 2F = 0 . \quad (3.27)$$

Точное аналитическое решение уравнения (4.7) существует в случае, когда параметр $Q^* = 0$ [13, 105]. Аналитическое общерелятивистское решение для дипольного магнитного поля в вакууме, выраженное через функции Лежандра второго рода [121], показывает, что магнитное поле усиливается фактором

$$\frac{F_{GR}(r)}{F_{Newt}(r)} = -\frac{3R^3}{8M^3} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right] \quad (3.28)$$

по сравнению с решением для плоского пространства-времени. Здесь $F_{Newt} = 2\mu/r^3$ - значение магнитного поля на полюсе в ньютоновском пределе.

Проинтегрируем теперь уравнение (4.7) в программе MAPLE 10 с помощью метода Рунге - Кутты пятого порядка, используя стандартные методы решений обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка, приведенные, например, в [122]). Для решения ОДУ нами были заданы начальные условия в виде $B(r) = 0$, $B'(r) = -\tilde{\epsilon}$ на $r = \infty$, где $\tilde{\epsilon}$ - маленькое положительное число, при этом нами было учтено значение магнитного поля на поверхности звезды в ньютоновском пределе. В пределе $r \rightarrow \infty$ действует ньютоновское решение для магнитного поля, поскольку величины Q^*/r^2 и M/r в этом случае пренебрежимо малы и не вносят никакого вклада в магнитное поле. При использовании этих условий уравнение интегрируется от некоторого внутреннего радиуса, который превышает горизонт событий $r_+/M = 1 + \sqrt{1 - Q^*}$, до поверхности релятивистской звезды. Сначала мы воспроизводим F_{GR}/F_{Newt} (ур. (4.8)) в аналитической форме с точностью до 10^{-5} , приравнявая Q^* к нулю. Радиус звезды считаем равным $R = 10$ км, а поверхностное поле на полюсе - $B(\bar{r} = r/R = 1) = 10^{12}$ Гс. После этого

Таблица 3.1: Усиление внешнего магнитного поля на граничной поверхности типичной релятивистской компактной звезды в результате влияния напряженности брана. Ньютоновское значение магнитного поля на полюсе принято равным $B_0 = 10^{12}$ Гс. Масса звезды составляет $M = 2M_\odot$ и радиус $R = 10$ км. Значения заряда Вейля Q^* взяты в единицах M^2 .

Q^*	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0
$B, (10^{12} \text{ G})$	1.94	2.05	2.17	2.32	2.51	2.77

выполним интегрирование для различных значений Q^* , как показано на рис. 3.1 а).

Усиление внешнего магнитного поля на поверхности релятивистской звезды, связанное с бран напряжением, представлено в таблицы 3.1. Фактор усиления поля меняется от 2 до 3 в зависимости от интенсивности заряда Вейля.

Как видно из представленных графиков на рис. 3.1 б), напряженность магнитного поля вне звезды увеличивается до ~ 170 % по сравнению со значением в плоском пространстве в зависимости от значения параметра Q^* .

Внутреннее численное решение

Для звезды с однородной плотностью ($\rho = const$), как было принято в нашей модели, можно выбрать $U = 0$ и $P = 0$. При этом в соответствии с уравнениями Эйнштейна и уравнениями Максвелла (3.6), (3.7) уравнение для неизвестной радиальной функции принимает вид

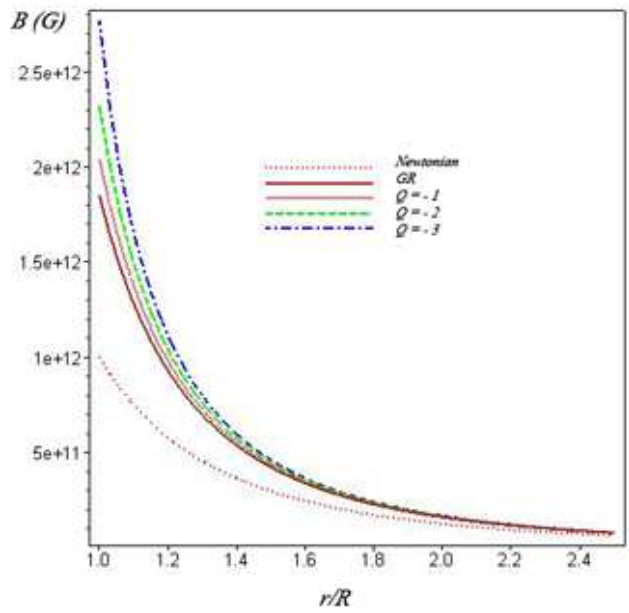
$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\Delta(r)}{\rho + p(r)} \frac{d}{dr} (r^2 F) \right] - \frac{2F}{[\rho + p(r)] \Delta(r)} = 0, \quad (3.29)$$

где

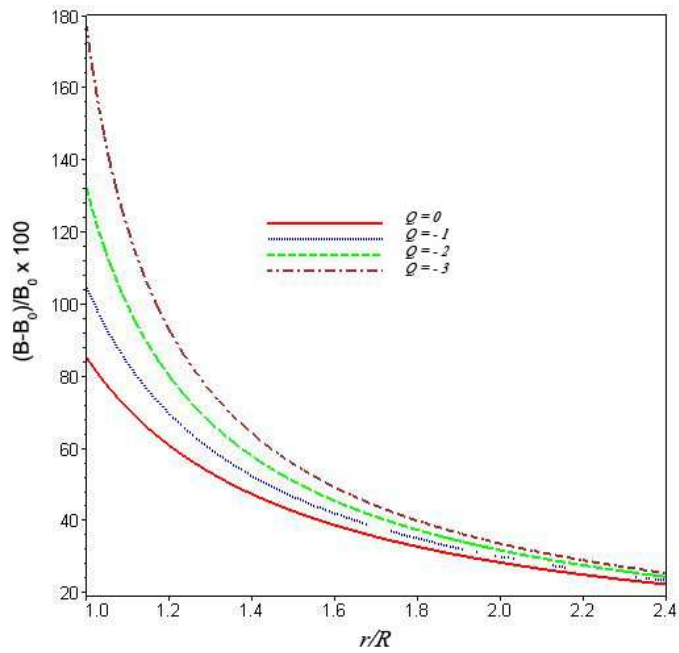
$$\Delta(r) \equiv \left[1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \left[1 - \frac{Q^*}{6MR} \right] \right]^{1/2}, \quad (3.30)$$

$$p(r) = \frac{[\Delta(r) - \Delta(R)] (1 - Q^*/3MR) \rho}{[3\Delta(R) - \Delta(r)] - [3\Delta(R) - 2\Delta(r)] Q^*/3MR}, \quad (3.31)$$

$$m(r) = M \left[1 - \frac{Q^*}{6MR} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^3. \quad (3.32)$$



а)



б)

Рис. 3.1: а) график зависимости магнитного поля B от радиальной координаты r/R вне релятивистской намагниченной компактной звезды с типичными параметрами $M = 2M_{\odot}$, $R = 10$ км и б) процентное увеличение магнитного поля как функция радиального расстояния r/R во внешней зоне релятивистской намагниченной звезды в зависимости от бран заряда. Бран заряд взят в единицах M^2 .

Для нахождения внутреннего численного решения используем тот же метод, как и в случае внешнего поля, то есть ОДУ рассматривается как задача с начальными условиями. В качестве начального значения $B(\bar{r} = 1)$ берется значение, которое было получено для внешнего решения

$$B_{ex|_{r=R}}^{\hat{r}} = B_{in|_{r=R}}^{\hat{r}} , \quad (3.33)$$

в связи с непрерывностью радиальной компоненты магнитного поля при пересечении звездной поверхности $r = R$.

Уравнения Максвелла (3.29) проинтегрированы, начиная от нижней границы $\bar{r} = 0.5$, где ожидается существование дипольного магнитного поля. На рис. (3.2) мы приводим магнитное поле внутренней части звезды как функцию радиального расстояния (нормированного на радиус звезды R), начиная от $\bar{r} = 0.5$ до звездной поверхности $\bar{r} = 1$. Из представленных графиков можно увидеть, что напряженность поля внутри звезды увеличивается из-за присутствия бран параметра. На половине радиуса звезды поле усиливается примерно на 20 процентов по сравнению со случаем общерелятивистской звезды Шварцшильда, в зависимости от выбранного значения параметра Q^* .

3.4 Астрофизические приложения к радиоизлучению пульсаров

Предположим, что имеется вращающаяся намагниченная НЗ (пульсар) на бранах, наблюдаемая посредством магнитодипольного излучения, при этом χ - угол между осью вращения и магнитной осью звезды. Выражение для мощности дипольного электромагнитного излучения звезды в таком случае имеет вид (см. [64])

$$L_{em} = \frac{\Omega^4 R^6 \tilde{B}_0^2}{6c^3} \sin^2 \chi , \quad (3.34)$$

где нижний индекс 0 указывает на значение при $r = R$.

При сравнении с аналогичным ньютоновским выражением для скорости потерь электромагнитной энергии посредством дипольного излучения [123]

$$(L_{em})_{Newt} = \frac{\Omega^4 R^6 B_0^2}{6c^3} \sin^2 \chi , \quad (3.35)$$

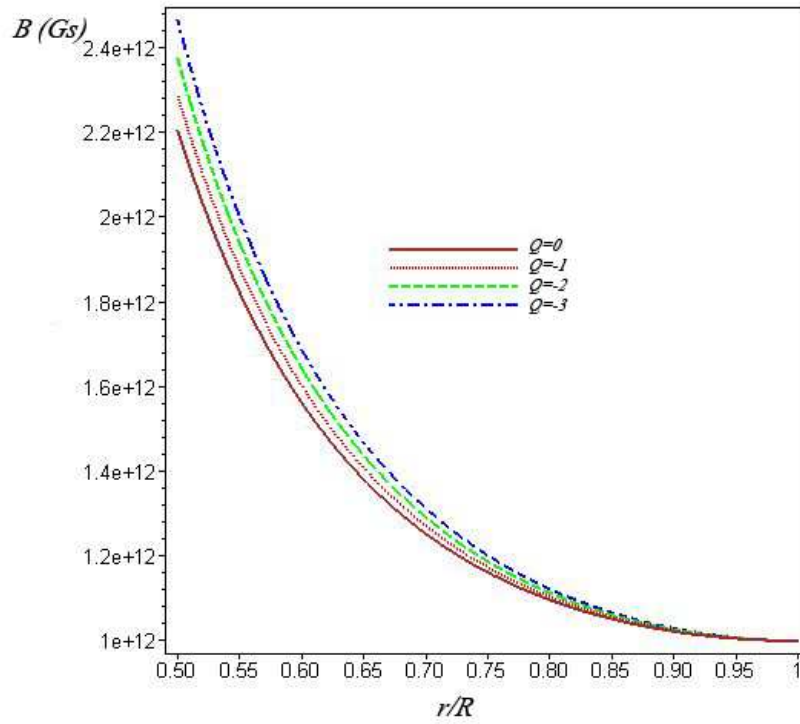


Рис. 3.2: График зависимости магнитного поля B от r/R для внутренней области типичной компактной релятивистской звезды с параметрами $M = 2 M_{\odot}$, $R = 10$ км и $\rho = 1.0 \times 10^{14}$ г см $^{-3}$ для различных значений Q^* . Коричневая сплошная кривая отвечает за $Q^* = 0$, красная точечная кривая за $Q^* = -1$, зеленая пунктирная кривая за $Q^* = -2$ и синяя точно-пунктирная кривая за $Q^* = -3$, которые взяты в единицах M^2 .

можно легко видеть, что общерелятивистские бран поправки в выражение (3.34) возникают отчасти из-за усиления магнитного поля $\tilde{B}_0 = F_R B_0$ на звездной поверхности и отчасти из-за увеличения эффективной угловой скорости вращения $\Omega = \Omega_R A_R$ за счет гравитационного красного смещения.

Присутствие бран напряженности увеличивает скорость потерь энергии через дипольное электромагнитное излучение на величину, которую можно легко вычислить

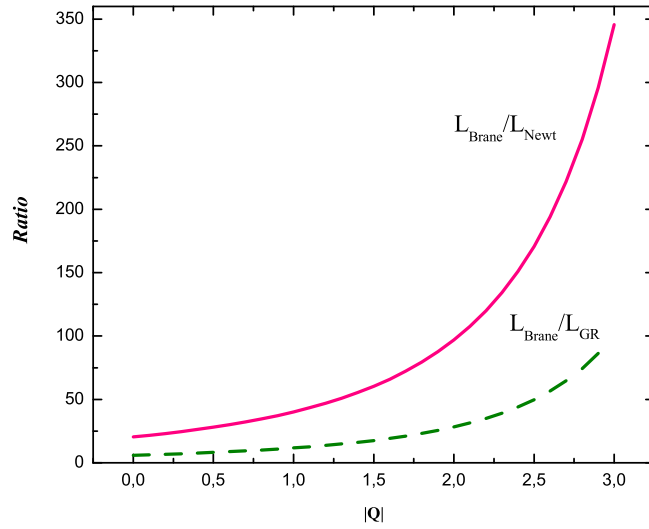
$$\frac{L_{em}}{(L_{em})_{\text{Newt}}} = \left(\frac{F_R}{A_R^2} \right)^2, \quad (3.36)$$

и которая изображена на рис. 3.3 а) в виде сплошной линии.

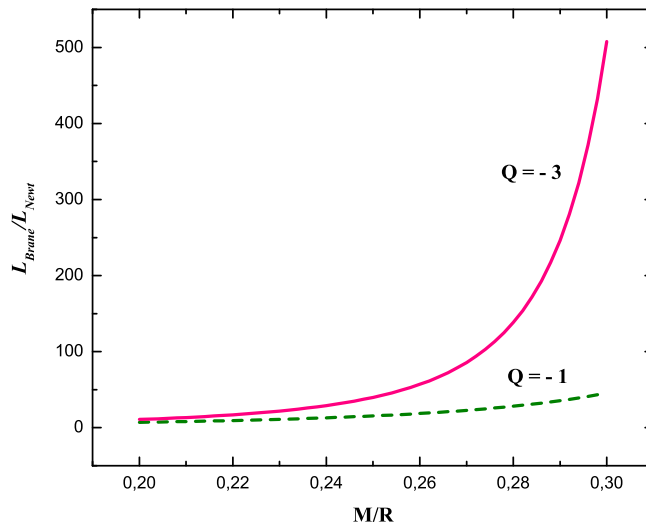
Рассматривая выражение (3.34) в выбранном диапазоне напряженности брана, можно видеть, что ньютоновское выражение для потерь электромагнитного излучения (3.35) дает меньший результат, чем полученное нами, и отношение выражений может достигать нескольких сотен в зависимости от значений параметра напряженности брана.

На рис. 3.3 б) показано усиление потерь электромагнитной энергии при наличии напряженности брана в зависимости от компактности релятивистской звезды и тем самым доказана важность эффектов, связанных с бран параметром, для ультракомпактных звезд.

Выражение (3.34) можно использовать для изучения эволюции намагниченных НЗ с дипольным магнитным полем, в которых энергия вращения преобразуется в электромагнитное излучение. Подробное исследование общерелятивистского эффекта для шварцшильдовских звезд выполнено в работе Пейдж и др. [104], где авторы обратили особое внимание на общерелятивистские поправки, которые должны быть включены для правильного моделирования тепловой и магнитной эволюции. Следует отметить, однако, что в своем подходе Пейдж и др. [104] учли общерелятивистское усиление магнитного поля, связанное с кривизной пространства-времени, но не включили поправки из-за гравитационного красного смещения. В результате, общерелятивистская электромагнитная мощность излучения, вычисленная Пейджем и др. [104], оказывается меньше, чем та, которая вычислена в нашей статье [64], где все общерелятивистские эффекты принимаются во внимание.



а)



б)

Рис. 3.3: а) усиление потерь энергии дипольного электромагнитного излучения в зависимости от абсолютного значения бран заряда. Сплошная линия изображает отношение потерь энергии для модели на бранах и плоского пространства-времени, а пунктирная линия дает потери энергии в Шварцшильдовском искривленном пространстве-времени и приведена для сравнения. Бран заряд $|Q^*|$ по оси абсцисс взят в единицах M^2 ; б) усиление потерь энергии дипольного электромагнитного излучения в зависимости от компактности звезды M/R для различных бран зарядов.

3.5 Вращающаяся ЧД на бранах в однородном магнитном поле

Метрика пространства-времени вращающейся ЧД на бранах в координатах t, r, θ, φ принимает следующую форму (см., например, [55])

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 + \frac{(\Sigma + a^2 \sin^2 \theta)^2 - \Delta a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - 2\frac{\Delta - \Sigma - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} a \sin^2 \theta d\varphi dt, \quad (3.37)$$

где $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^*$, Q^* - бран заряд, M полная масса и параметр a связан с угловым моментом ЧД.

Здесь используем факт существования в заданном пространстве-времени времениподобного $\xi_{(t)}^\alpha$ и пространственноподобного $\xi_{(\varphi)}^\alpha$ векторов Киллинга, которые ответственны за стационарность и аксиальную симметрию геометрии. Так как они удовлетворяют уравнениям Киллинга $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$, и, следовательно, уравнениям волнового типа (в пустом пространстве) $\square \xi^\alpha = 0$, можно записать вакуумное решение уравнений Максвелла $\square A^\mu = 0$ для векторного потенциала A_μ электромагнитного поля в лоренцевой калибровке в следующей форме $A^\alpha = C_1 \xi_{(t)}^\alpha + C_2 \xi_{(\varphi)}^\alpha$. Постоянная $C_2 = B/2$, при этом гравитационный источник помещен в однородное магнитное поле \mathbf{B} , направление которого параллельно оси вращения центрального объекта. Значение постоянной $C_1 = aB$ может быть легко найдено с помощью асимптотических свойств пространства (3.37) на бесконечности (см., Приложение А.).

Конечный вид 4-вектора потенциала A_μ электромагнитного поля примет следующую форму:

$$A_0 = \frac{aB}{2\Sigma} [(2 + \sin^2 \theta)(a^2 \sin^2 \theta - \Delta) - \Sigma \sin^2 \theta], \quad A_1 = A_2 = 0, \\ A_3 = \frac{B \sin^2 \theta}{2\Sigma} [(\Sigma + a^2 - \Delta)(2 + \sin^2 \theta)a^2 + \Sigma(\Sigma + \sin^2 \theta)]. \quad (3.38)$$

Нулевые ортонормированные компоненты электромагнитного поля, и измеряемые ННУМ с 4-скоростью

$$(u^\alpha)_{\text{ZAMO}} \equiv \frac{K}{\sqrt{\Delta\Sigma}} \left(1, 0, 0, \frac{\Sigma a^2 \sin^2 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} - 1 \right), \quad (u_\alpha)_{\text{ZAMO}} \equiv \frac{\sqrt{\Delta\Sigma}}{K} (1, 0, 0, 0),$$

принимают следующий вид

$$E^{\hat{r}} = \frac{aB}{\Sigma^2} \left\{ 2(M-r) + M \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{\Delta - a^2 \sin^2 \theta} (\Sigma - \Delta + a^2 \sin^2 \theta) \right. \\ \times \left[r\Sigma + a^2(2 + \sin^2 \theta) \frac{r\Delta - a^2 r + (M-r)\Sigma}{\Sigma} \right] \\ \left. + \frac{r}{\Sigma} (2 + \sin^2 \theta) [\Sigma^2 + (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)(2 + \sin^2 \theta)] \right\} K, \quad (3.39)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{aB \sin 2\theta}{2\Sigma^2 \sqrt{\Delta}} \left\{ a^2 \sin^2 \theta - \Delta - \Sigma + \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta + \Sigma}{\Sigma} a^2 (2 + \sin^2 \theta) \right. \\ \left. + \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta + \Sigma}{\Delta \csc^2 \theta - a^2} [(\Sigma - a^2(1 + \cos^2 \theta) - \Delta) a^2 \sin^2 \theta + \Sigma(\Sigma \right. \\ \left. + a^2 \sin^2 \theta) + \frac{\Sigma - \Delta + a^2}{\Sigma} a^2 (\Sigma + a^2 \sin^2 \theta)(2 + \sin^2 \theta)] \right\} K, \quad (3.40)$$

$$B^{\hat{r}} = \frac{B \csc \theta}{2K\Sigma} \left[(\Sigma - a^2(1 + \cos^2 \theta) - \Delta) a^2 \sin^2 \theta + \Sigma(\Sigma + a^2 \sin^2 \theta) \right. \\ \left. + \frac{\Sigma - \Delta + a^2}{\Sigma} a^2 (\Sigma + a^2 \sin^2 \theta)(2 + \sin^2 \theta) \right], \quad (3.41)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{B \sin \theta \sqrt{\Delta}}{K\Sigma} \left[r\Sigma + a^2(2 + \sin^2 \theta) \frac{r\Delta - a^2 r + (M-r)\Sigma}{\Sigma} \right], \quad (3.42)$$

где использовано обозначение $K = ((\Sigma + a^2 \sin^2 \theta)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta)^{1/2}$. Выражения зависят от углового момента и бран параметра сложным образом. В пределе плоского пространства, т.е. при $M/r \rightarrow 0$, $Ma/r^2 \rightarrow 0$ и $Q^*/r^2 \rightarrow 0$, выражения (3.39)–(3.42) имеют вид $B^{\hat{r}} = B \cos \theta$, $B^{\hat{\theta}} = B \sin \theta$, $E^{\hat{r}} = E^{\hat{\theta}} = 0$ и совпадают с ньютоновскими решениями в однородном магнитном поле. Однородное магнитное поле на фоне пятимерной ЧД было детально изучено в работе [124]. В частности, авторы получили точные выражения для 2-формы электромагнитного тензора и разности электростатического потенциала между горизонтом событий пятимерной ЧД и бесконечностью.

3.6 Движение заряженной частицы вокруг вращающейся черной дыры на бранах

В этом разделе подробно изучим движение заряженной частицы вокруг вращающейся ЧД на бранах во внешнем магнитном поле с учетом 4-векторного

потенциала (3.38) с целью поиска астрофизических доказательств существования или несуществования бран заряда Q^* .

Поскольку пространство-время вращающегося объекта на бранах допускает разделение переменных (см., например, [23]), будем исследовать движение частиц вокруг источника, описываемого метрикой (3.4), с помощью уравнения Гамильтона-Якоби 1.24. При этом действие S можно представить в форме (1.25), так как энергия \mathcal{E} и угловой момент \mathcal{L} пробной частицы являются константами движения в пространстве (3.4).

Для рассматриваемого случая уравнение Гамильтона-Якоби (1.24) с действием в виде (1.25) дает уравнение для неразделяемой части действия

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2A^2} \left[\mathcal{E} + \frac{a}{r} \left(\frac{2M\mathcal{L}}{r^2} - \frac{Q^*\mathcal{L}}{r^3} + A^2 eB \right) \right] \left[2\mathcal{E} + aeBA^2 - aeB \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right) \right. \\ & \times \sin^2 \theta \left. \right] + \left(L + \frac{1}{2} eBr^2 \sin^2 \theta \right) \left[\frac{eB}{2} + \frac{\mathcal{L}}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{a\mathcal{E}}{r^2 A^2} \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right) \right] \\ & + A^2 \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta} \right)^2 = -m^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В общем случае в этом уравнении невозможно осуществить разделение переменных, но оно может быть реализовано для случая движения в экваториальной плоскости, т.е. $\theta = \pi/2$. В этом случае уравнение для радиального движения принимает форму

$$\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 = \mathcal{E}^2 - 1 - 2V_{\text{eff}}(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, \epsilon, a, Q^*). \quad (3.44)$$

Здесь σ - собственное время вдоль траектории частицы, \mathcal{E} и \mathcal{L} энергия и угловой момент на единицу массы m , соответственно, и

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\mathcal{E}, \mathcal{L}, r, \epsilon, a, Q^*) &= \frac{a\mathcal{E}\mathcal{L}}{r^2} \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\mathcal{L}^2}{2r^2} + \frac{\epsilon\mathcal{L}}{2} + \frac{\epsilon^2 r^2}{8} + a\mathcal{E}\epsilon \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} \right) - \frac{M}{r} + \frac{Q^*}{2r^2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

можно рассматривать как эффективный потенциал радиального движения заряженной частицы в окрестности ЧД на бранах, где $\epsilon = eB/m$ - магнитный параметр.

На рисунке 3.4 показана радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженных частиц в экваториальной плоскости

медленно вращающейся ЧД на бранах во внешнем однородном магнитном поле при различных значениях параметров магнитного поля (а) и бран заряда (б). Из рисунков видно, как магнитный и бран параметры влияют на характер движения заряженных частиц. Оба параметра сдвигают форму эффективного потенциала в сторону удаленного наблюдателя на бесконечности, в результате чего минимальное расстояние между заряженными частицами и центральным объектом возрастает. С увеличением модуля бран заряда параболические и гиперболические орбиты начинают становиться нестабильными круговыми орбитами, в то время как магнитный параметр дает обратный эффект (рис. 3.4) (см., главу 1.). Таким образом, радиальный профиль V_{eff} для различных значений бран заряда Q^* в пределах от -1 до -3 показывает, что при увеличении модуля Q^* от 1 до 3 потенциальный барьер уменьшается по сравнению с шварцшильдовским случаем, как и ожидалось для потенциала ЧД типа Райснера-Нордстрема.

3.7 Движение пробной частицы вокруг ЧД на бранах

Для того чтобы найти точное аналитическое решение для радиуса r_{ISCO} , предположим, что ЧД на бранах является невращающейся и внешнее магнитное поле отсутствует. После этого метрика (3.4) может быть записана в виде диагональной:

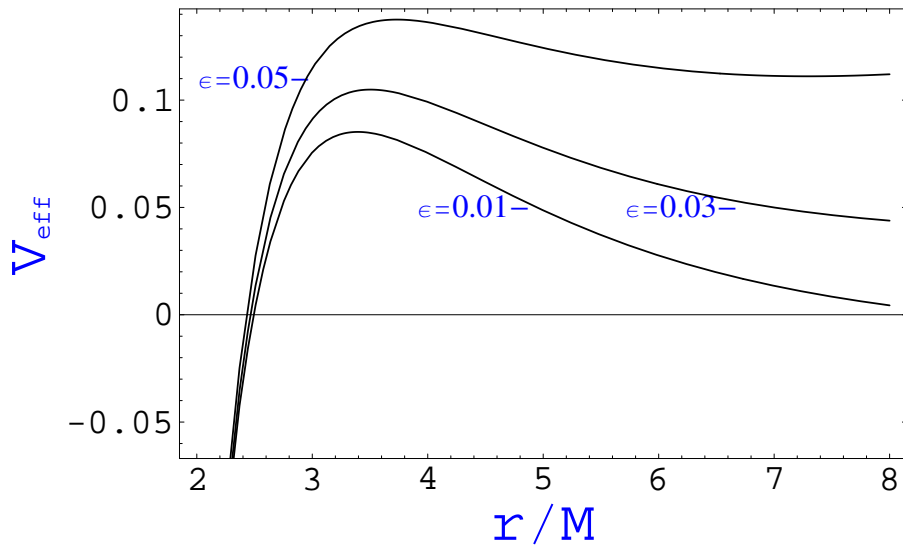
$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (3.46)$$

где $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^*$ не содержит член, пропорциональный угловому моменту ЧД. Теперь с помощью метода Гамильтона-Якоби, описанного в предыдущем параграфе 3.6, можно легко найти уравнение движения пробной частицы в экваториальной плоскости ЧД на бранах:

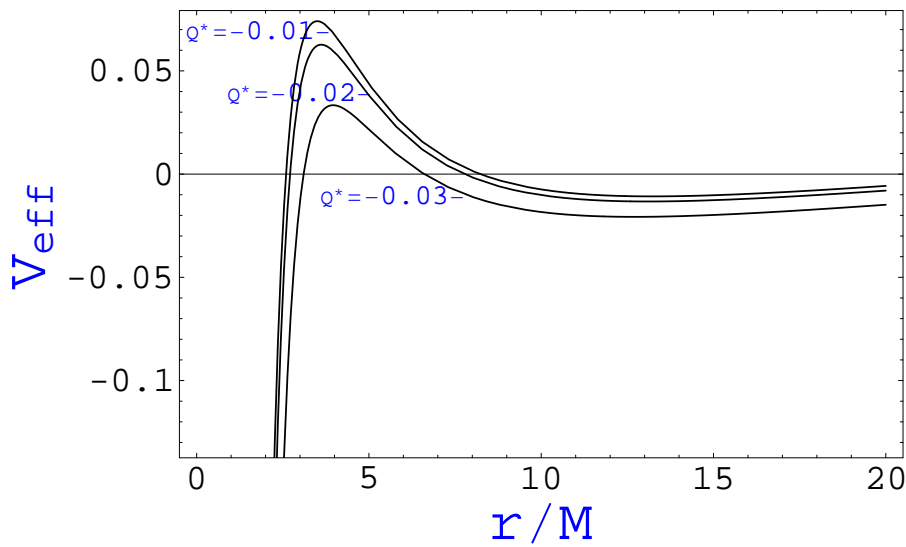
$$\frac{dt}{d\sigma} = \mathcal{E} \frac{r^2}{\Delta}, \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}\right), \quad (3.48)$$

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{\mathcal{L}}{r^2}. \quad (3.49)$$



a)



б)

Рис. 3.4: Радиальная зависимость эффективного потенциала радиального движения заряженной частицы вокруг медленно вращающейся ЧД на бранах, помещенной в однородное магнитное поле, при различных значениях параметра магнитного поля ϵ (а) и бран заряда Q^* (б).

С помощью уравнений (3.48) и (3.49), введя новую переменную $\tilde{u} = 1/r$, можно получить следующее уравнение

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\varphi}\right)^2 = -Q^*\tilde{u}^4 + 2M\tilde{u}^3 - \left(1 + \frac{Q^*}{\mathcal{L}^2}\right)\tilde{u}^2 + \frac{2M}{\mathcal{L}^2}\tilde{u} - \frac{1 - \mathcal{E}^2}{\mathcal{L}^2} = f(\tilde{u}) , \quad (3.50)$$

которое определяет траекторию пробной частицы в окрестности ЧД на бранах. Из условия возникновения круговых орбит [125, 126]:

$$f(\tilde{u}) = 0 , \quad f'(\tilde{u}) = 0 ,$$

следует, что энергия \mathcal{E} и момент импульса \mathcal{L} частицы, движущейся по круговой орбите радиуса $r_c = \tilde{u}_c^{-1}$, даются выражениями

$$\mathcal{E}^2 = \frac{(1 - 2M\tilde{u} + Q^*\tilde{u}^2)^2}{1 - 3M\tilde{u} + 2Q^*\tilde{u}^2} , \quad (3.51)$$

$$\mathcal{L}^2 = \frac{M - Q^*\tilde{u}}{2Q^*\tilde{u}^3 - 3M\tilde{u}^2 + \tilde{u}} . \quad (3.52)$$

На рис. 3.5 показана радиальная зависимость как энергии, так и углового момента импульса пробной частицы, движущейся по круговой орбите в экваториальной плоскости. Из рисунка видно, что присутствие бран параметра вынуждает пробную частицу принимать большие значения энергии и углового момента для того, чтобы оставаться на своей круговой орбите, что является следствием увеличения гравитационного потенциала центрального объекта на бранах.

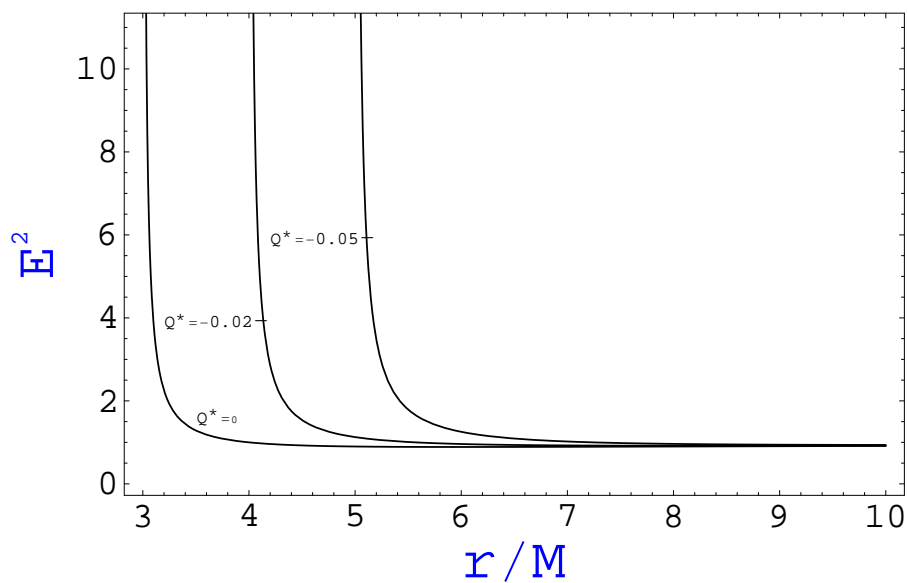
Из уравнений (3.51) и (3.52) можно найти минимальный радиус круговой орбиты r_{mc}

$$r_{\text{mc}} > \frac{4Q^*}{3M - \sqrt{9M^2 - 8Q^*}} , \quad (3.53)$$

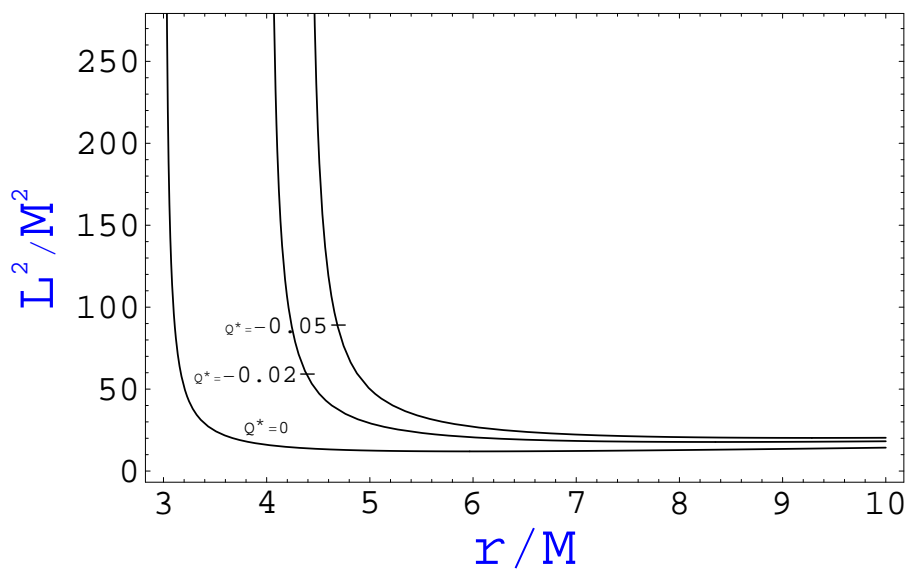
или, при разложении в ряд по степеням Q^*/M^2 , оно принимает следующую форму :

$$r_{\text{mc}} \approx 3M - \frac{2Q^*}{3M} - \frac{4Q^{*2}}{27M^3} + \mathcal{O}\left(\frac{Q^{*3}}{M^5}\right) . \quad (3.54)$$

В предельном случае, когда Q^* стремится к нулю, $r_{\text{mc}} = 3M$, что совпадает с результатом для пространства-времени Шварцшильда. Минимальный радиус для стабильной круговой орбиты может быть определен в точке изгиба функции $f(\tilde{u})$, другими словами, мы должны дополнить условия



a)



б)

Рис. 3.5: Радиальная зависимость энергии (а) и момента импульса (б) пробной частицы, движущейся по круговой орбите вокруг ЧД на бранах, для различных значений бран заряда Q^* . Для сравнения также приведена зависимость для случая ЧД Шварцшильда, соответствующая условию $Q^* = 0$.

$f(\tilde{u}) = f'(\tilde{u}) = 0$ условием $f''(\tilde{u}) = 0$. Тогда можно легко получить уравнение:

$$4Q^{*2}\tilde{u}^3 - 9MQ^*\tilde{u}^2 + 6M^2\tilde{u} - M = 0 \quad (3.55)$$

и его решение в виде

$$r = \frac{4Q^*}{3M + \sqrt[3]{A-B} + \sqrt[3]{A+B}} \equiv r_{\text{ISCO}} , \quad (3.56)$$

где

$$A = 8MQ^* - 9M^3, \quad B = 4\sqrt{(4MQ^* - 5M^3)(MQ^* - M^3)}. \quad (3.57)$$

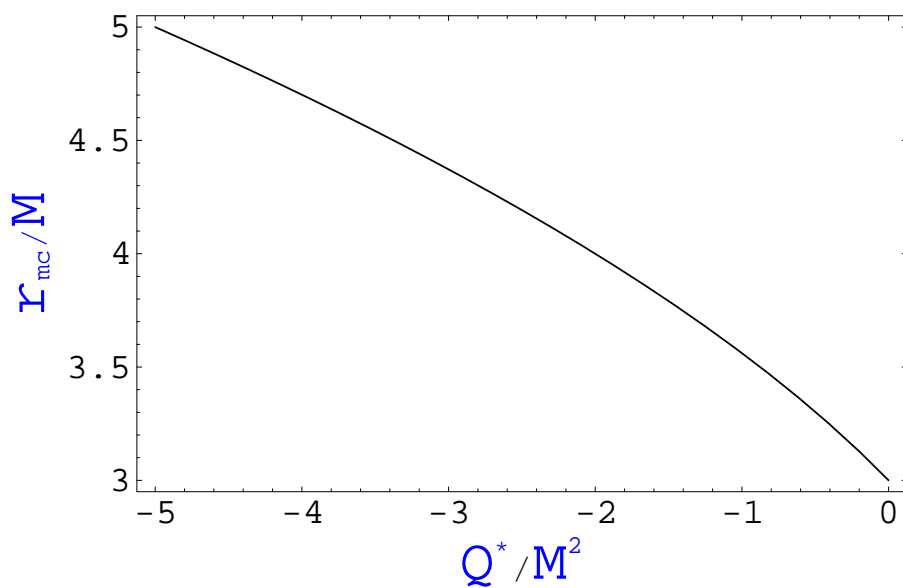
При разложении этого выражения по степеням Q^*/M^2 оно принимает следующую форму:

$$r_{\text{ISCO}} \approx 6M - 1.5\frac{Q^*}{M} + 0.0078\frac{Q^{*2}}{M^3} + \mathcal{O}\left(\frac{Q^{*3}}{M^5}\right). \quad (3.58)$$

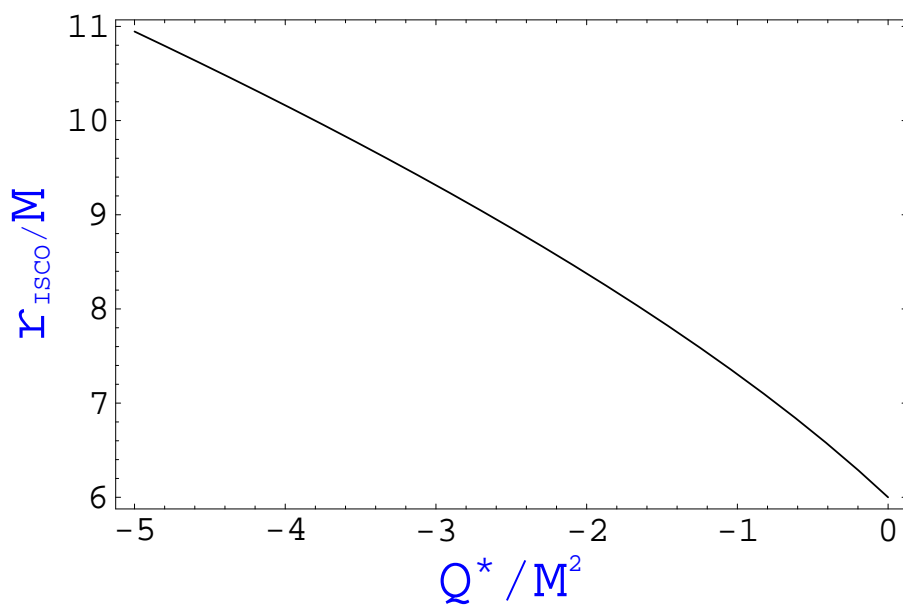
Таким образом, найдено оригинальное аналитическое выражение (3.56), которое определяет предел устойчивости внутренней круговой орбиты в окрестности ЧД на бранах. Численные решения с аналогичными результатами для r_{ISCO} в окрестности вращающейся ЧД на бранах и круговых орбит в аккреционном диске были приведены в работах [55] и [113], соответственно.

Зависимость минимального радиуса круговой орбиты $r_{\text{мс}}$ и радиуса стабильной круговой орбиты (СКО) вокруг ЧД от натяжения браны приведена на рис. 3.6, где значения для Шварцшильдовской ЧД соответствуют условию $Q^* = 0$. Из рисунка видно, что наличие натяжения браны сдвигает радиусы стабильных орбит от центрального объекта в направлении удаленного наблюдателя на бесконечности.

Изменение значения Q^* также влияет на положение стабильной орбиты, как это показывает сдвиг СКО, представленный в левой части рисунка 3.6. Уменьшение бран заряда приводит к увеличению радиуса СКО. С уменьшением значения Q^* от 0 до -5, радиус СКО принимает все большие и большие значения. Низкие значения потенциала для Q^* приводят к понижению удельной энергии орбиты частицы. При уменьшении Q^* от 0 до -5, радиус СКО увеличивается от значений для стабильной орбиты в геометрии Шварцшильда до больших значений. Эффективность имеет противоположную тенден-



a)



б)

Рис. 3.6: Зависимость нижнего предела радиуса круговой орбиты r_{mc} (а) и r_{ISCO} (б) от бран заряда Q^*

цию по сравнению с угловым моментом: при отрицательном бран заряде она принимает большие значения, чем в случае Шварцшильдской ЧД.

Проведем теперь точный вывод сечения захвата ЧД медленно движущихся пробных частиц в рамках модели на бранах (медленное движение означает, что $\mathcal{E} \simeq 1$ на бесконечности). Критическое значение момента импульса частицы, \mathcal{L}_{cr} , зависит от наличия кратных корней полинома $f(\tilde{u})$ в (3.50) [127]. Для удобства перепишем уравнение (3.50) в безразмерных величинах $r \rightarrow r/M$, $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/M$ и $Q^* \rightarrow Q^*/M^2$:

$$r^3 - \frac{\mathcal{L}^2 + Q^*}{2}r^2 + \mathcal{L}^2r - \frac{Q^*\mathcal{L}^2}{2} = 0. \quad (3.59)$$

Кубическое уравнение (3.59) имеет кратные корни, если и только если его дискриминант равен нулю. После простых алгебраических преобразований легко получить уравнение для углового момента импульса частицы

$$\mathcal{L}^6(1 - Q^*) - \mathcal{L}^4(3Q^{*2} - 20Q^* + 16) - \mathcal{L}^2Q^{*2}(8 + 3Q^*) - Q^{*4} = 0, \quad (3.60)$$

которое имеет точное решение в виде

$$\mathcal{L}_{\text{cr}}^2 = \begin{cases} \sqrt[3]{-B_1/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-B_1/2 - \sqrt{D}} - \frac{(20Q^* - 3Q^{*2} - 16)^2}{3(1 - Q^*)}, & D \geq 0; \\ 2\sqrt{\frac{-A_1}{3}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[-B_1 / (2\sqrt{-(A_1/3)^2}) \right] \right\} - \frac{(20Q^* - 3Q^{*2} - 16)^2}{3(1 - Q^*)}, & D < 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Здесь мы ввели следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{(20Q^* - 3Q^{*2} - 16)^2}{3(1 - Q^*)^2} - \frac{8Q^{*2} + 3Q^{*3}}{1 - Q^*}, \\ B_1 &= 2\frac{(20Q^* - 3Q^{*2} - 16)^2}{27(1 - Q^*)^3} - \frac{(20Q^* - 3Q^{*2} - 16)^2(8Q^{*2} + 3Q^{*3})}{1 - Q^*} - \frac{Q^{*4}}{1 - Q^*}, \\ D &= \frac{A_1^3}{27} + \frac{B_1^2}{4}. \end{aligned}$$

В предельном случае, т.е. когда бран заряд равняется нулю, решение уравнения (3.60) примет вид $\mathcal{L} = 4$, что совпадает с критическим моментом для сечения захвата частиц Шварцшильдской ЧД [128]. Частица с критическим угловым моментом импульса движется из бесконечности в направлении ЧД

на бранах и захватывается на нестабильную круговую орбиту с радиусом

$$r_{\text{uc}} = 2\sqrt[3]{\left(\frac{\mathcal{L}^2 + Q^*}{6}\right)^3 - \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{L}^2 + Q^*}{6}\right) + \mathcal{L}^2 Q^* + \frac{\mathcal{L}^2 + Q^*}{6}}. \quad (3.62)$$

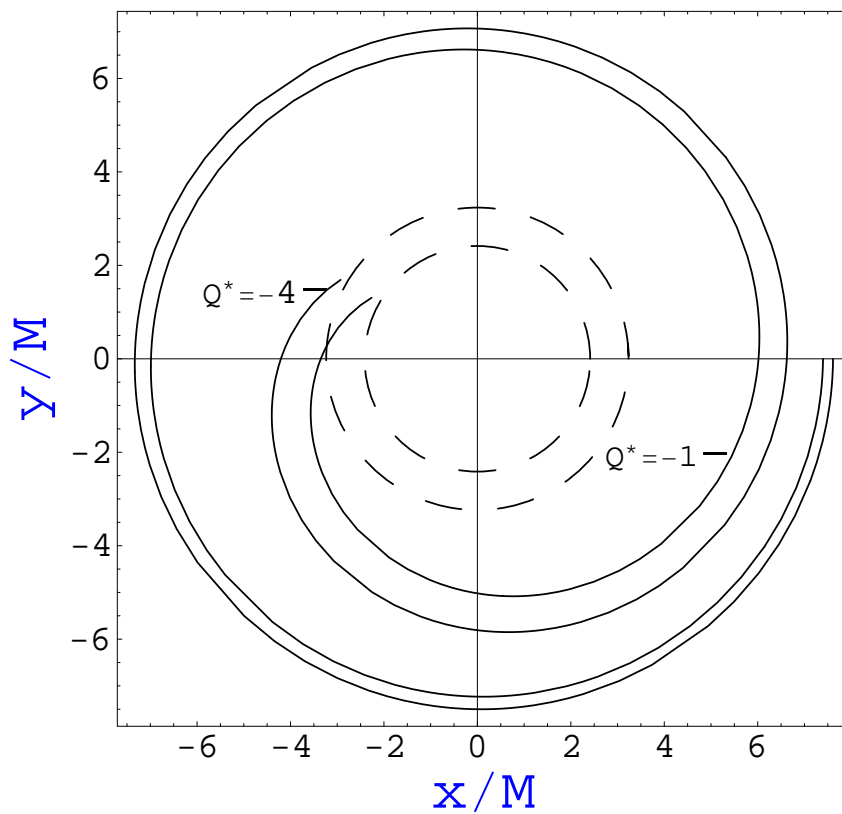
В заключение, на графике 3.7 приводим формы различных видов траекторий пробных частиц в окрестности ЧД на бранах, которые даются уравнением (3.50). Траектории пробных частиц, падающих на центральную ЧД при различных значениях бран параметра, показаны на рис. 3.7 а). Из рисунка видно, что с увеличением модуля бран параметра орбиты сдвигаются в сторону удаленного наблюдателя на бесконечности, что является следствием увеличения радиуса горизонта событий в модели на бранах. На рис. 3.7 б) приведена форма круговой орбиты вокруг ЧД на бранах.

3.8 Заключение

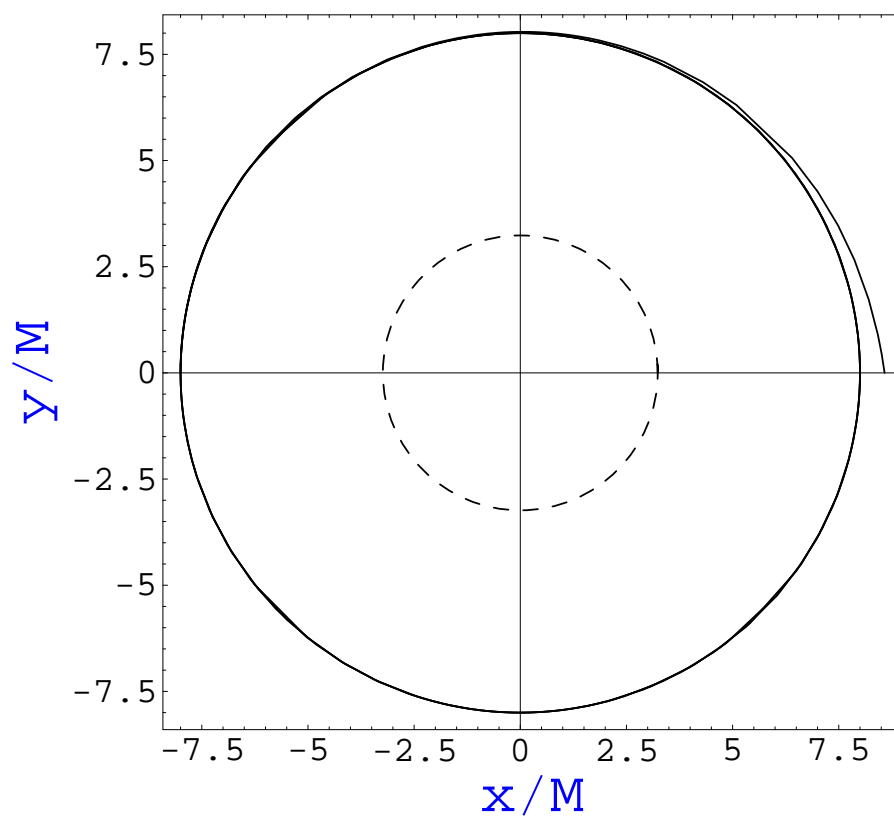
В данной главе изучены стационарные электромагнитные поля изолированной медленно вращающейся релятивистской компактной звезды на бранах. При этом использовано предположение о том, что магнитное поле заморожено в звездной коре из-за высокой проводимости звездного вещества, и наложены специфические граничные условия. Учтены дополнительные эффекты напряженности брана на величину электромагнитного поля.

Вначале внутренние уравнения Максвелла решены аналитически и найдены точные решения для внутреннего магнитного поля звезды с нереалистичным УС жесткого вещества. Проведены численные расчеты, которые учитывают влияние напряженности брана на структуру электромагнитного поля вне вращающейся звезды и на конфигурацию внутреннего магнитного поля звезды с постоянной плотностью. Сравнивая поведение магнитного поля при наличии и отсутствии напряженности брана, можно увидеть усиление магнитного поля релятивистской звезды на бранах, в особенности вблизи поверхности звезды для внешнего поля и на внутренней границе для внутреннего поля. Этот эффект становится сильнее с ростом параметра брана Q^* .

Численные расчеты структуры внешнего магнитного поля без учета напряженности брана полностью совпадают с известным аналитическим решением



а)



б)

Рис. 3.7: Орбиты пробных частиц; а) орбита частицы, падающей на центральную ЧД, для различных значений бран заряда Q^* ; б) стабильная круговая орбита пробной частицы в окрестности ЧД на бранах. Горизонты событий обозначены пунктирными линиями.

для магнитного поля, когда заряд брана Q^* равен нулю.

Численные расчеты подтверждают, что существует два аспекта влияния напряженности брана на магнито-дипольное излучение. Первый из них обусловлен усилением поверхностного магнитного поля при учете напряженности брана. Другой выражается присутствием функции Q^*/r^2 в факторе красного смещения $\sqrt{1 - 2M/r + Q^*/r^2}$, который определен на звездной поверхности в выражении для мощности магнито-дипольного излучения. Мы нашли, что эффект напряженности брана на магнитные поля компактных звезд может быть весьма существенным, а мощность магнито-дипольного излучения вращающейся намагниченной звезды на бранах возрастает до двух порядков.

Мы заключаем, что исследование эффекта напряженности брана на структуру магнитного поля релятивистской звезды может дать дополнительный ключ к астрофизическому обоснованию параметра Q^* .

В этой главе также исследованы основные физические свойства движения частиц в пространстве-времени ЧД на бранах. Мотивация данного исследования обусловлена тем, что тестирование сильного гравитационного поля и обнаружение возможных отклонений от стандартной ОТО, дающих сигнал о наличии новой физики, остаются одними из наиболее важных задач наблюдательной астрофизики. В силу своей компактности, ЧД обеспечивают идеальные условия для проведения точных релятивистских измерений, в частности, наблюдательной проверки вакуумных решений уравнения поля в модели на бранах.

Были получены точные значения для таких физических параметров как эффективный потенциал и СКО, характеризующих вакуумное решение уравнений поля в модели на бранах. Нами найдено новое точное аналитическое выражение для нижней границы внутренней СКО пробной частицы в окрестности ЧД на бранах (ранее поведение СКО в модели на бранах было исследовано только численно [55, 113]). Также нами получены графики зависимости СКО от бран параметра и траекторий частицы вокруг ЧД на бранах.

В недавних работах были получены наиболее точные пределы значений

бран параметра ЧД с помощью классических тестов ОТО (прецессия перигелия, отклонение света, а также задержка радиолокационных волн) [111]. Существующие наблюдательные данные в солнечной системе о прецессии перигелия Меркурия, об изгибе света вокруг Солнца (полученные с помощью данных радиоинтерферометрии) были применены к релятивистскому бран пространству, и таким образом были получены верхние пределы для численного значения модуля бран параметра. Самый точный предел $|Q^*| \lesssim 10^8 \text{ см}^2$ был получен из прецессии перигелия Меркурия.

Недавние измерения радиуса СКО в аккреционных дисках вокруг ЧД также могут предоставить альтернативные пределы на численные значения бран заряда. Все астрофизические величины, связанные с наблюдаемыми свойствами аккреционного диска, можно получить из метрики ЧД. Наблюдения в ближнем ИК или рентгеновском спектре предоставили важную информацию о спине ЧД [129, 130]. Было заявлено, что наблюдаемая вращающаяся ЧД имеет спин в диапазоне $0.5 \lesssim a \lesssim 1$. Как было замечено, СКО радиусы в основном смещаются в сторону центрального объекта и не существует какого-либо измеряемого эффекта от бран параметра, который действовал бы в противоположном направлении.

Из-за различий в структуре пространства, ЧД на бранах имеют некоторые важные отличия с точки зрения их аккреционных свойств, по сравнению со стандартными общерелятивистскими случаями Шварцшильда и Керра. Таким образом, исследование внутренней стабильной орбиты в окрестности компактных объектов является показателем их физической природы. Поскольку радиус СКО в случае ЧД на бранах отличается от стандартных общерелятивистских случаев, астрофизические наблюдения и измерения этих физических величин могут дать различия, по крайней мере, между различными теориями гравитации, а также могут дать некоторые ограничения на наличие дополнительных измерений. Наконец, поскольку из астрофизических наблюдений не было обнаружено влияние бран параметра на стабильную орбиту вокруг ЧД при значениях порядка 10^8 см^2 , на основе сопоставления наблюдательных данных по СКО в аккреционных дисках вокруг ЧД

и теоретического анализа СКО в окрестности ЧД на бранах, можем заключить, что бран заряд имеет верхний предел $\lesssim 10^9 \text{ см}^2$. По приблизительным оценкам на порядок меньшее значение Q^* не может повлиять на данные наблюдений по СКО вокруг ЧД.

ГЛАВА 4. Эволюция бессиловой магнитосферы вокруг медленно вращающегося компактного объекта

4.1 Введение

Существует широко распространенное мнение о том, что вращающаяся ЧД, вероятно, является источником энергии ряда компактных астрофизических систем, таких как активные галактические ядра, гамма-всплески и рентгеновские двойные системы. Теоретические аргументы поддерживают идею о том, что сверхмассивные ЧД с массой более $10^5 M_{\odot}$, которые, как считается, находятся в центре большинства галактик во Вселенной, аккрецируют вещество, высвобождая при этом значительную часть его гравитационной энергии (см. [131], для обзора). Наиболее правдоподобный механизм извлечения энергии ЧД был предложен Блэндфордом и Знаеком [132], где предполагается, что ЧД аккрецируя, неизбежно будет затягивать магнитный поток за счет аккреционных линий поля уходящих в бесконечность. Таким образом выстраивается квази-стационарная по времени конфигурация магнитного поля с линиями поля, встроенными на горизонте событий ЧД, которая в бессиловых полях из-за спина ЧД будет двигать МГД ветер.

Есть несколько спорных вопросов, касающихся этой модели, в частности - допустим ли этот механизм физически? Некоторые неразрешенные или непонятые в полной мере физические проблемы создают пробелы в модели Блэндфорда-Знаека. К ним относятся причины возникновения и стабильность бессиловой магнитосферы, глобальное замыкание тока, а также влияние граничных условий на каналы извлечения энергии. Одним из первых спорных вопросов, который был поднят в статье [133], является вопрос о том, могут ли быть причинно связаны горизонт событий ЧД и плазма, расположенная на далеком расстоянии от ЧД. В этой статье утверждалось, что,

хотя плотность плазмы является пренебрежимо малой в стандартной формулировке механизма Блэндфорда-Знаека, она не может быть в буквальном смысле равной нулю. Авторы показали, что вокруг горизонта событий неизбежно будет создаваться поверхность, внутри которой скорость плазмы будет больше магнитозвуковой скорости, и сигналы, несущие энергию или информацию, не смогут выйти наружу через эту поверхность. Позже авторы статьи [134], проведя анализ бессиловых волн и исследовав причинные связи в магнитосфере ЧД, пришли к выводу, что возмущения заряда и тока не могут распространяться вдоль быстромодных характеристик в бессиловом пределе.

Одной из основных компонент активных галактических ядер считается магнитосфера вокруг сверхмассивных ЧД [135, 136]. Вопрос о том, могут ли такие ЧД взаимодействовать с удаленными объектами через окружающую их бессиловую магнитосферу и являются ли такие структуры стабильными, был недавно поднят в работе [137]. Пунслием [138] было показано, что кажущиеся убедительными результаты работы [137] при более глубоком рассмотрении терпят неудачу. Согласно [137] быстрые волны могут распространяться со скоростью света с E_{\parallel} ; это означает, что светоподобные плосковолновые решения могут иметь продольную поляризацию. Такой результат противоречит симуляции, сделанная по модели Комиссарова о поляризации [139, 140]. Изучая глобальные физические свойства бессиловой вырожденной электродинамики, автор попытался разрешить это противоречие, и было показано, что бессиловые быстрые волны не могут распространяться с изменением в E_{\parallel} .

Изучая вторую часть статьи [137], мы нашли много математических опечаток в наборе уравнений Максвелла, а также в бессиловом условии (приложение В этой же статьи). Исследование пространственной эволюции бессиловой магнитосферы, следовательно, может привести к неточным результатам. В этой главе мы скорректировали формулы, данные автором [137], и получили более точное решение эволюционных уравнений.

Исследование электромагнитных процессов в окрестности Керр-Тауб-НУТ

компактного гравитационного объекта обусловлено тем, что эффекты ОТО в метрике Керр-Тауб-НУТ могут дать возможность экспериментального обнаружения так называемого гравитационного монопольного момента. В предыдущих главах было проведено исследование электромагнитного поля в окрестности Керр-Тауб-НУТ компактного объекта, а также движения пробных частиц в электромагнитном и гравитационном полях последнего.

Глава устроена следующим образом. В параграфе 4.2 определяется азимутальный магнитный потенциал с использованием вакуумного решения общерелятивистских уравнений Максвелла. Далее, в бессиловом приближении находится эволюционное уравнение для электромагнитного поля. Решение уравнения общерелятивистской эволюции находится с помощью метода последовательных приближений. В параграфе 4.3 исследуется вопрос об извлечении энергии электромагнитного поля в окрестности гравитирующих объектов с гравитомагнитным монопольным моментом, т.е. эффект Блэндфорда-Знаека [132]. Параграф 4.4 посвящен изучению эффекта Пенроуза в метрике вращающегося компактного объекта с гравитомагнитным зарядом. В разделе 4.5 приводятся заключительные замечания.

4.2 Пространственная эволюция бессиловой магнитосферы

Рассмотрим гравитирующий компактный объект, первоначально не вращающийся и имеющий аксиально-симметричное статическое магнитное поле. Внешнее гравитационное поле такого компактного объекта описывается метрикой

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 - 2\omega(r)r^2 \sin^2 \theta dt d\varphi + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4.1)$$

где $N = 1 - 2M/r$ - функция длительности, а $\omega(r)$ - угловая скорость свободно падающей ИСО, также называемая угловой скоростью Лензе-Тирринга. Радиальная зависимость ω имеет вид:

$$\omega(r) \equiv \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2J}{r^3}, \quad (4.2)$$

где $J = aM$ - полный (a - удельный) угловой момент метрического источника полной массой M .

Предположим, что первоначальное магнитное поле определяется вакуумным решением уравнений Максвелла (D.1)–(D.4) и (D.5)–(D.8): которое даётся векторным потенциалом $A_\alpha\{0, 0, 0, A_\varphi\}$.

В случае аксиальной симметрии, полоидальное магнитное поле, измеряемое собственным наблюдателем в метрике (4.1), может быть выражено через азимутальные компоненты векторного потенциала

$$B_p^{\hat{r}}(t, r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta A_\varphi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} b_\ell(t, r) P_\ell(\cos \theta), \quad (4.3)$$

$$B_p^{\hat{\theta}}(t, r, \theta) = -\frac{N}{r \sin \theta} \partial_r A_\varphi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{N \sin \theta}{\ell(\ell+1)} \partial_r(b_\ell(t, r)) \partial_\theta P_\ell(\cos \theta), \quad (4.4)$$

где было использовано выражение для угловой производной функции Лежандра P_ℓ (уравнение (A2) в [141])

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta (P_\ell(\cos \theta))] = -\ell(\ell+1) P_\ell(\cos \theta). \quad (4.5)$$

В этом случае уравнение Максвелла для ненулевых компонент векторного потенциала (D.8) примет форму

$$r^2 \partial_r (N^2 \partial_r A_\varphi) + \sin \theta \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta A_\varphi \right) = 0. \quad (4.6)$$

Раскладывая векторный потенциал по функциям Лежандра для дипольного случая (когда $\ell = 1$) и вводя новую переменную $A_\varphi = r^2 F \sin^2 \theta$, можно показать, что уравнение (4.6) принимает следующую форму (уравнение (87) из [62])

$$\frac{d}{dr} \left[N^2 \frac{d}{dr} (r^2 F) \right] - 2F = 0, \quad (4.7)$$

и имеет решение в виде

$$A_\varphi(r) = F r^2 \sin^2 \theta = \frac{3\mu r^2}{8M^3} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right] \sin^2 \theta \quad (4.8)$$

и сводится к плоско-пространственному решению с дипольным магнитным моментом μ , т.е.

$$\lim_{M/r \rightarrow 0} F(r) = \frac{\mu}{r^3}. \quad (4.9)$$

Необходимо подчеркнуть, что в статье [137] решение для $A_\varphi = (B/2)r^2 \sin^2 \theta$ не удовлетворяет уравнениям Максвелла (B6) - (B9).

Введем теперь адиабатическое возмущение состояния гравитирующего объекта таким образом, чтобы он постепенно приобрел момент импульса; пространство - время в этом случае может быть описано с помощью метрики (4.1) с $a = a(t)$. Из уравнения (D.11) ясно, что азимутальный ток $\left(J^{\hat{\varphi}} + \frac{\omega r \sin \theta}{N} J^{\hat{t}} \right)$ имеет порядок $O(a^2)$ и что для второго порядка по a бессиловое условие (D.9)–(D.12) сводится к

$$J^{\hat{r}} = -\frac{1}{Nr} \frac{(\partial_\theta A_\varphi)}{(\partial_r A_\varphi)} J^{\hat{\theta}} = -Y(r) \cot \theta J^{\hat{\theta}} , \quad (4.10)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{1}{Nr} \frac{(\partial_\theta A_\varphi)}{(\partial_r A_\varphi)} E^{\hat{r}} = Y(r) \cot \theta E^{\hat{r}} , \quad (4.11)$$

где

$$Y(r) = \frac{r}{NM} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right] \left[\frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right]^{-1} . \quad (4.12)$$

Из уравнений (D.1), (D.4) и (4.11) можно получить уравнение эволюции для тороидального магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^{\hat{\varphi}}}{\partial t} = & -\frac{N}{r} \left(r N E^{\hat{\theta}} \right)_{,r} + \frac{N}{r} Y^{-1}(r) \left(\tan \theta E^{\hat{\theta}} \right)_{,\theta} - \\ & - \frac{9aN\mu}{2M^2 r^3} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right] \sin \theta \cos \theta . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из уравнений (D.6), (D.7) и (4.10), (4.11) получим дифференциальное уравнение для электрического поля

$$\begin{aligned} \left\{ (1 + Y^{-2}(r) \tan^2 \theta) \right\} \frac{\partial^2 E^{\hat{\theta}}}{\partial t^2} + \frac{N}{r} \left[r N (\partial_t B^{\hat{\varphi}}) \right]_{,r} - \\ - \frac{N}{r \cos \theta} Y^{-1}(r) \left[\sin \theta (\partial_t B^{\hat{\varphi}}) \right]_{,\theta} = 0 . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тогда в бессиловой магнитосфере уравнение непрерывности электрического заряда $J_{;\alpha}^\alpha$ можно записать в следующем виде

$$\partial_t J^{\hat{t}} + \frac{N}{r^2} \partial_r (r^2 N J^{\hat{r}}) + \frac{N}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta J^{\hat{\theta}}) = 0 . \quad (4.15)$$

Линеаризация уравнения (D.8) позволяет получить волновые уравнения для возмущения векторного потенциала δA_φ

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \delta A_\varphi - N^2 \partial_r (N^2 \partial_r \delta A_\varphi) - \frac{N^2 \sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \delta A_\varphi \right) = \\ = 4\pi N^2 r \sin \theta \left(J^{\hat{\varphi}} + \frac{\omega r \sin \theta}{N} J^{\hat{t}} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где правая сторона уравнения пропорциональна a^2 и является пренебрежимо малой в нашем приближении.

Определим теперь безразмерное время как $\tau = t/2M$. Вблизи горизонта событий безразмерные переменные $x = N^2$ пренебрежимо малы и уравнение (4.14) может быть решено с использованием подхода теории возмущений. Необходимо подчеркнуть, что бессиловое приближение может быть нарушено в очень близкой окрестности горизонта событий, т.е. когда x достаточно мало и плазменная инерция и гравитация начинают играть важную роль в динамике частицы. Однако, как было отмечено в статье [142], бессиловое приближение может быть эффективно использовано почти до самого горизонта событий.

Вблизи горизонта событий соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 2M} \left[\ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r} \right) \right]^{-1} \left[\frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] = \left(\frac{1}{xb} + 1 \right), \quad (4.17)$$

где $b = \ln(x) + 3/2$, может играть существенную роль. Очевидно, что в некоторой фиксированной точке $r = 2M(1+x)$ функция $F(r) = (3\mu b)/(8M^3)$ медленно меняется с изменением x и можно предположить, что $F = \text{const} < 0$. Мы предположим, что решение может быть разложено в ряд

$$\tilde{E}^{\hat{\theta}} = \sum_n f_n(\tau) x^n P_l^m(\cos \theta) \approx (f_0(\tau) + f_1(\tau)x) 3 \cos \theta \sin \theta + O(x^2), \quad (4.18)$$

где f_n неизвестная функция и для наших целей мы выбираем $l = 2$, $m = 1$. После этого эволюционные уравнения (4.14) и (4.13) принимают более про-

стой вид

$$\frac{\partial \tilde{B}^{\hat{\varphi}}}{\partial t} = -\frac{1}{2M} \left(\tilde{E}^{\hat{\theta}} + x \tilde{E}_{,x}^{\hat{\theta}} - \frac{1}{b} \tilde{E}^{\hat{\theta}} - x \tilde{E}^{\hat{\theta}} + \frac{Fa}{M} 3 \sin \theta \cos \theta \right), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{E}^{\hat{\theta}}}{\partial t^2} + \frac{1}{4M^2} \left\{ -\tilde{E}^{\hat{\theta}} - 3x \tilde{E}_{,x}^{\hat{\theta}} + 3x \tilde{E}^{\hat{\theta}} + \frac{1}{b} (2 - 3x) \tilde{E}^{\hat{\theta}} + \frac{2x}{b} \tilde{E}_{,x}^{\hat{\theta}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{b^2} \tilde{E}^{\hat{\theta}} + \frac{Fa}{M} 3 \sin \theta \cos \theta \left(3x - 1 + \frac{1}{b} \right) \right\} = 0, \quad (4.20) \end{aligned}$$

где введены новые переменные $\tilde{E}^{\hat{\theta}} = N^{-1} E^{\hat{\theta}}$ и $\tilde{B}^{\hat{\varphi}} = N^{-1} B^{\hat{\varphi}}$. В приведенных выше уравнениях пренебрегаются все малые члены, зависящие от x^2 , и используется предположение (4.18).

Далее мы предположим, что изменение момента импульса со временем имеет вид $a(\tau) = a_0 [1 - e^{-\tau/T}]$, где введен безразмерный параметр $\tau = t/2M$, T - время в единицах $2M$.

Для нулевого порядка имеем

$$\tilde{E}^{\hat{\theta}} = 3f_0(\tau) \cos \theta \sin \theta, \quad (4.21)$$

где функция f_0 и тороидальное магнитное поле определяются следующими уравнениями

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \tau^2} - \left(1 - \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2} \right) f_0 - \left(1 - \frac{1}{b} \right) \frac{Fa}{M} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial B^{\hat{\varphi}}}{\partial \tau} = -N \left(f_0 \left(1 - \frac{1}{b} \right) + \frac{Fa}{M} \right) 3 \sin \theta \cos \theta, \quad (4.23)$$

которые найдены из уравнения (4.19) и (4.20). Из этих уравнений видно, что, в отличие от результатов [137] (см. уравнение (23)), нет каких-либо дополнительных членов $-2M$ в знаменателе в правой стороне, и уравнение довольно сложное.

Решение для функции f в нулевом порядке имеет вид

$$f_0(\tau) = -\frac{Fa_0 b \left[(T^2 - 1)b^2 - 2T^2 b + T^2 - T^2(b-1)^2 e^{-\tau/T} + b^2 e^{(1-b)\tau/b} \right]}{M(b-1) [(T+1)b - T] [(T-1)b - T]}, \quad (4.24)$$

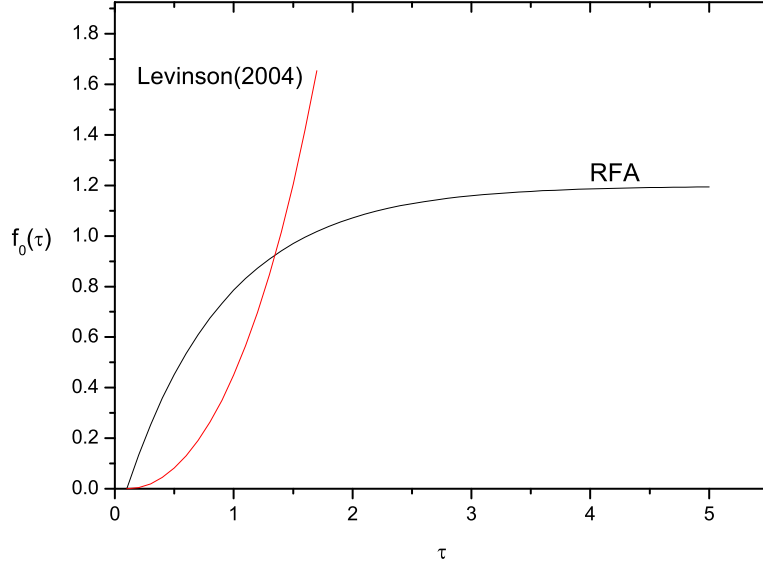


Рис. 4.1: Эволюция функции $f(\tau, x)$ во времени в нулевом приближении, где $x = 0.001$, $T = 0.01$ и угловой момент равен $a_0 = 0.7$ (масса и импульс для удобства приняты равными единице).

при этом оно удовлетворяет начальным условиям $E^{\hat{\theta}} = \partial_{\tau} E^{\hat{\theta}} = 0$ в момент $\tau = 0$. Надо отметить, что вблизи горизонта F принимает отрицательное значение (см. рис. 4.1).

Для первого порядка из уравнения (18) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2} + \left(1 - \frac{1}{b}\right) (3f_0 - 4f_1) - \frac{1}{b^2} f_1 + \frac{3Fa}{M} = 0, \quad (4.25)$$

которое имеет решение (см. рис. 4.2)

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = 3b^3 F a_0 \left\{ bT^2 (3b - 2) e^{-\tau/T} - (4b^2 T^2 - b^2 - 4T^2 b + T^2) e^{-\tau + \tau/b} - \right. \\ \left. - (b^2(1 - T^2) + T^2(2b - 1)) e^{(1-2b)\tau/b} \right\} \times \\ \times \left\{ M(3b - 2)(T^2(b - 1)^2 - b^2)(T^2(b - 1)^2 - b^2) \right\}^{-1}, \quad (4.26) \end{aligned}$$

Из поведения функций $f_0(\tau)$ и $f_1(\tau)$ ясно, что в начальный момент времени значение $f_1(\tau)$ очень мало по сравнению с $f_0(\tau)$ и растет во времени очень

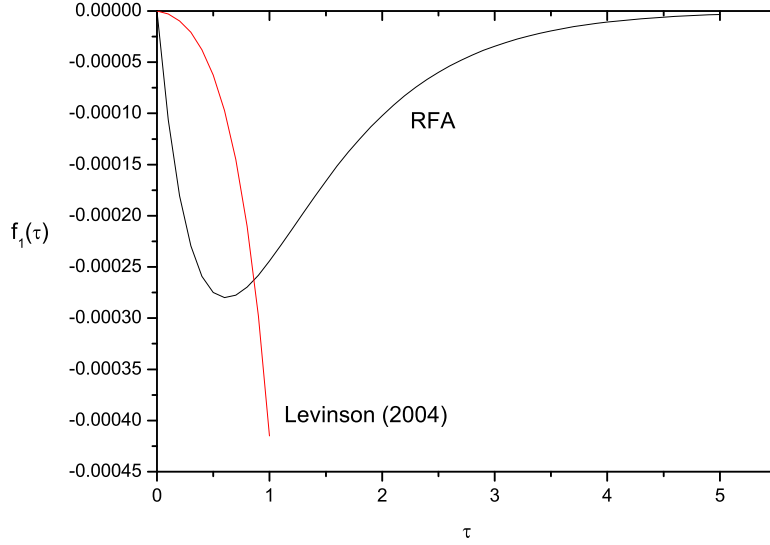


Рис. 4.2: Эволюция функции $f(\tau, x)$ во времени в первом приближении, где $x = 0.001$, $T = 0.01$ и угловой момент равен $a_0 = 0.7$ (масса и импульс для удобства приняты равными единице).

медленно. Вначале $f_1(\tau)$ растет экспоненциально с отрицательным значением, затем внезапно падает до нуля. Это означает, что с данного момента решение является недействительным. Надо обратить внимание, что по сравнению с результатами [137], эволюция электрического поля является более сложной, но, несмотря на сложности, результаты дают стационарные решения, т.е. эволюция протекает адиабатически и высшие порядки не дают существенного вклада. Однако, сравнивая рисунки, можно увидеть, что в статье [137] не указано, что эволюция действительно достигает устойчивой точки.

Пренебрегая первым порядком для тороидального магнитного поля относительно нулевого порядка, с помощью уравнений (4.23) и (4.24) можно получить выражение

$$B_0^\varphi(\tau) = \frac{Na_0 b^2 F \left[\frac{b}{b-1} (1 - e^{-(b-1)\tau/b}) - T (1 - e^{-\tau/T}) \right]}{M (bT - b - T) (bT + b - T)} 3 \sin \theta \cos \theta, \quad (4.27)$$

которое растет адиабатически с течением времени (см. рис. 4.3).

Нулевой порядок не дает вклада в полоидальное течение, но для первого порядка вблизи оси вращения, то есть при малых углах, с помощью уравне-

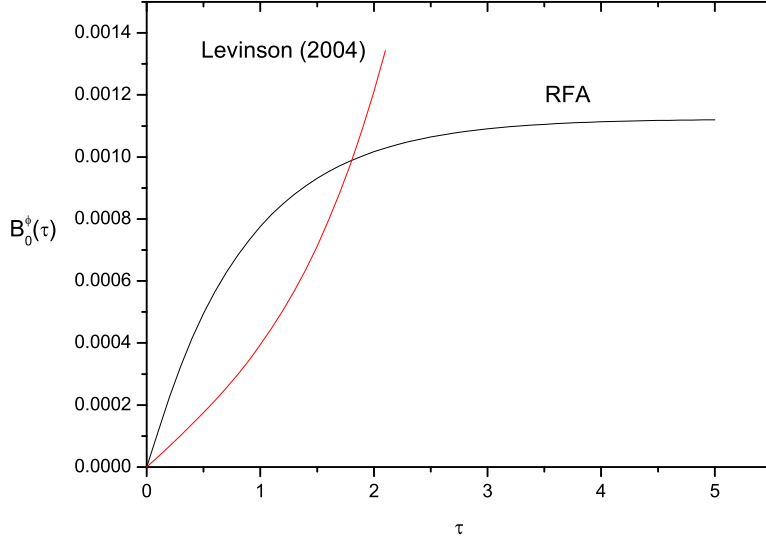


Рис. 4.3: Эволюция тороидального магнитного поля во времени в нулевом приближении вблизи экваториальной плоскости при $\theta = 0.01$ радиан, где для удобства масса и импульс приняты равными единице, $x = 0.001$, $T = 0.01$ и угловой момент равен $a_0 = 0.7$.

ний (4.13), (4.14), (D.6) и соотношения (4.11) находим

$$j_1^{\hat{r}} = -\frac{3a_0 b^2 F \cos^2 \theta \left(\frac{b}{b-1} e^{(1-b)\tau/b} - T e^{-\tau/T} \right)}{8\pi M^3 (bT - b - T)(bT + b - T)} x. \quad (4.28)$$

Очевидно, что полоидальный ток изначально появляется всюду в пространстве, как это показано в статье [143], и равняется

$$j^{\hat{r}}(\tau = 0) = \frac{3a_0 b^2 F \cos^2 \theta}{8\pi M^3 (b-1)(bT + b - T)} x. \quad (4.29)$$

Но для тороидального тока из (D.5) находим для нулевого порядка

$$j_0^{\hat{t}} = \frac{3f_0 \sin \theta \cos \theta}{4\pi M} \quad (4.30)$$

и для первого порядка

$$j_1^{\hat{t}} = \frac{3bf_0 + (1 + b/4)f_1}{4\pi M} 3x \sin \theta \cos \theta. \quad (4.31)$$

Вышеуказанные решения отличаются от решений, представленных в статье [137]. К примеру, в уравнениях (4.28), (4.29) присутствует дополнительный член M/π , который должен присутствовать в выражениях для тока для

получения правильных единиц измерения. Хотя эволюционные уравнения также отличаются, и являются более сложными, чем в статье Левинсона, это не является причиной разрыва эволюции структуры, и можно быть уверенным, что в начальное время тороидальное магнитное поле возбуждается вблизи ее устойчивого значения. Вышеуказанные результаты подтверждают, что магнитосфера ЧД является стабильной, несмотря на большое количество опечаток в статье [137].

4.3 Механизм Блэндфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ

Метрика аксиально-симметричного поля в сферических координатах (ct, r, θ, φ) описывается следующим выражением:

$$ds^2 = -\alpha^2(cdt)^2 + \sum_{i=1}^3 h_i^2(dx^i - \omega_i dt)^2 = -\alpha^2(cdt)^2 + \sum_{i=1}^3 (h_i dx^i - c\alpha\beta_i dt)^2, \quad (4.32)$$

где коэффициенты h_i представляют собой масштабный параметр координат x^i , ω_i - угловая скорость вращения, α - метрическая функция красного смещения, $\beta_i = h_i\omega_i(c\alpha)$ - вектор смещения в метрике Керр-Тауб-НУТ, которые принимают следующий вид:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta \sin^2 \theta}{(\Sigma + a\chi)^2\theta - \chi^2\Delta}}, h_1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, h_2 = \sqrt{\Sigma}, h_3 = \sqrt{\frac{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2\Delta}{\Sigma}}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta}{\Sigma \sin \theta}, \omega_3 = -\frac{\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta}{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2\Delta},$$

а параметры Σ , Δ и χ определяются как

$$\Sigma = r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \Delta = r^2 - 2Mr - l^2 + a^2, \chi = a \sin^2 \theta - 2l \cos \theta .$$

Здесь l - гравитомангнитный монополюсный момент, $a = J/M$ - удельный угловой момент компактного объекта с полной массой M .

Закон сохранения можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu) = 0, \quad (4.33)$$

где $g = \text{Det}(g_{\mu\nu}) = -(\alpha h_1 h_2 h_3)^2$ - детерминант метрического тензора, $T^{\mu\nu}$ - тензор энергии импульса и ξ^ν - вектор Киллинга. Для приближенной модели однокомпонентной плазмы имеем [20]:

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + \eta u^\mu u^\nu + F_\sigma^\mu F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\sigma\rho}, \quad (4.34)$$

здесь p - собственное давление, $\eta = e_{int} + p$ - плотность энтальпии, u^μ - 4-скорость и $F_{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля. Плотность тепловой энергии для адиабатической плазмы задается выражением $e_{int} = p/(\Gamma - 1) + \rho c^2$, где Γ - показатель адиабаты. Пользуясь в этом пространстве-времени векторами Киллинга $\xi^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$, можно получить выражение для так называемой плотности энергии и момента импульса на асимптотической бесконечности:

$$\frac{\partial e^\infty}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1 h_2 h_3 S^i) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1 h_2 h_3 M^i), \quad (4.36)$$

где $S^i = -\alpha g_{\mu 0} T^{i\mu}$ - плотность потока энергии, $l = \alpha g_{3\nu} T^{3\nu/c}$ - плотность углового момента и $M^i = \alpha h_i T^{i\nu} g_{\nu 3}$ - плотность потока углового момента. Ограничимся только той частью плотности энергии на бесконечности, которая ответственна за электромагнитное поле:

$$e_{EM}^\infty = \frac{\alpha}{2} (\hat{B}^2 + \hat{E}^2) + \alpha \beta \cdot (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}}). \quad (4.37)$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ - напряженности электрического и магнитного полей, измеренные ННУМ. В этой системе электрическое поле можно выразить через магнитное поле в виде:

$$\hat{E} = -\frac{h_3}{\alpha} (\Omega_F - \omega_3) e_\varphi \times \hat{B}^P, \quad (4.38)$$

где e_φ - единичный вектор, параллельный азимутальной координате, $B^P = B - B_\varphi e_\varphi$ - полоидальное магнитное поле, Ω_F - угловая скорость вращения силовых линий магнитного поля. Из граничных условий на горизонте событий

$$B_\varphi = v_F^\varphi(r \rightarrow r_h) \cdot B^P, \quad (4.39)$$

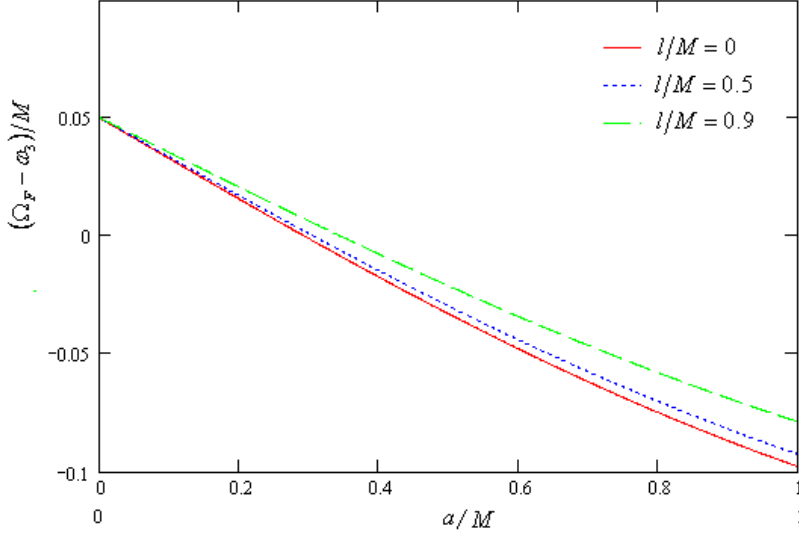


Рис. 4.4: Зависимость знака $\Omega_F - \omega_3$ от параметра a/M при разных значениях l/M .

где r_h - радиус горизонта событий, находим следующее выражение:

$$\alpha e_{EM}^{\infty} = h_3^2 (B^P)^2 \Omega_F (\Omega_F - \omega_3). \quad (4.40)$$

Из выражения (4.40) видно, что энергия на бесконечности принимает отрицательные значения и энергия извлекается из гравитационного объекта. Хотя это утверждение выглядит противоречащим определению горизонта событий, которое гласит, что никакая энергия, материальное вещество или информация никогда не могут покинуть горизонт, его можно интерпретировать как перемещение отрицательной электромагнитной энергии магнитного поля на бесконечности внутрь компактного объекта. Это и соответствует эффекту Блэндфорда-Знаека в метрике Керр-Тауб-НУТ. Зависимость знака $\Omega_F - \omega_3$ от НУТ параметра приведена на рис. 4.4. Решение при отсутствии гравитомагнитного монополярного момента соответствует результату работы [20]. При этом видно, что наличие гравитомагнитного монополярного момента у компактного гравитационного объекта уменьшает абсолютное значение энергии и соответственно интервал значений, что соответствует извлечению энергии компактного объекта.

4.4 Эффект Пенроуза в гравитационном поле компактного объекта с гравитомагнитным монополярным рядом

Если рассмотреть частицу с ненулевой массой покоя m в точке $r_p(t)$ в отсутствие электромагнитного поля, т.е. при $\rho = \frac{m}{\gamma}\delta^3(r - r_p(t)), \rho = 0$, and $B = E = 0$, то выражения (4.35) и (4.36) примут следующий интегральный вид

$$E^\infty = \int_{V_f} e^\infty dV = \alpha\gamma mc^2 + \omega_3 L, \quad (4.41)$$

$$L = \int_{V_f} l dV = h_3 m \gamma v^3, \quad (4.42)$$

где V_f - полный объем пространства, γ - Лоренц фактор.

Из выражений (4.41) - (4.42) вытекает

$$E^\infty = \alpha\gamma mc^2 \left(1 + \beta_3 \frac{v^3}{c}\right). \quad (4.43)$$

Если $\beta_3 v^3/c < -1$, энергия частицы на бесконечности становится отрицательной. Это условие выполняется только в эргосфере ($\beta_3 > 1$). Используя соотношение $\alpha^2 \{1 - \sum_i (\beta_i)^2\} = -g_{00}$, получим определение эргосферы: $g_{00} > 0$.

Если рассмотреть распад частиц в эргосфере, $A \rightarrow B + C$, законы сохранения энергии и углового момента на бесконечности принимают следующий вид:

$$E_A^\infty = E_B^\infty + E_C^\infty, \quad (4.44)$$

$$L_A = L_B + L_C, \quad (4.45)$$

$$E_I^\infty = \alpha\gamma_I m_I c^2 + \omega_3 L_3 \quad (I=A,B,C). \quad (4.46)$$

При условии сильного распада, такого, что имеет место условие $L_B = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 < -c h_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$, получаем, что $E_B^\infty < 0$ и, следовательно, $E_A^\infty < E_C^\infty$. Это означает, что частица C покидает компактный объект, тогда как частица B остается внутри эргосферы и падает на объект. На рис. 4.5 показана зависимость знака $S(r) = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 + h_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$ от НУТ

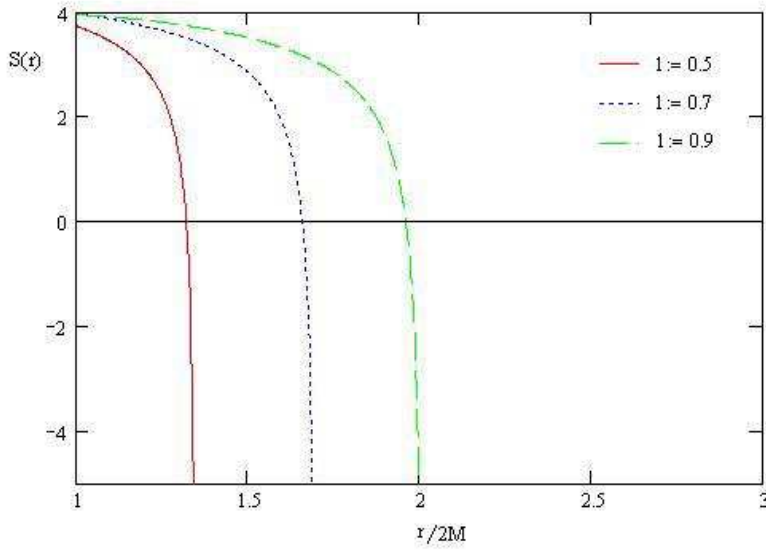


Рис. 4.5: Зависимость знака $S(r) = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 + h_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$ от гравитомагнитного монопольного момента.

параметра. Из рисунка видно, что с увеличением гравитомагнитного монопольного момента радиус, на котором происходит процесс Пенроуза, сдвигается в сторону удаленного наблюдателя.

4.5 Заключение

В данной главе было показано, что уравнения Максвелла (B6), (B7), однородное уравнение Максвелла (B13) и бессиловое условие (B14) - (B17), записанные в [137] во втором порядке малости по a^2 , не совпадают с уравнениями, полученными здесь, что может привести к неточным результатам при получении формулировки стабильности структуры. Кроме того, из решений в статье [137] не видно, что полоидальное электрическое поле и тороидальное магнитное поле адиабатически меняются во времени (решения показывают, что они изменяются со временем экспоненциально). Получив более точные решения, можно заключить, что на самом деле полоидальное электрическое и тороидальное магнитное поля растут адиабатически. Скорректированы формулы автора [137] и заключили, что, хотя результаты являются весьма различными, это не нарушает стабильность структуры – после некоторого времени тороидальное магнитное поле и плотность заряда приходят к их стационарным решениям, что подтверждает стабильность магнитосферы ЧД [144].

Основные результаты и заключение

В заключении перечислим основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Найдены точные выражения для электромагнитного поля в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ, которые свидетельствуют о том, что электромагнитное поле зависит от величины гравитомагнитного заряда. Причем, индуцированное электрическое поле зависит от НУТ параметра линейно, а магнитное поле зависит от него квадратично.
2. Найдены аналитические общерелятивистские выражения для электромагнитных полей медленно вращающейся намагниченной НЗ с ненулевым гравитомагнитным зарядом l . Показано, что общерелятивистские поправки, возникающие за счет эффекта увлечения ИСО и наличия гравитомагнитного заряда, не присутствуют в выражении для дипольного магнитного поля. В частности, показано, что увлечение ИСО и гравитомагнитный заряд генерируют дополнительные индуцированные электрические поля, которые аналогичны случаю вращения намагниченных звезд в пределе плоского пространства.
3. Изучено движение заряженных частиц вокруг Керр-Тауб-НУТ источника, расположенного во внешнем а) однородном и б) дипольном магнитном поле, с помощью анализа уравнения Гамильтона-Якоби. Показано, что в присутствии НУТ параметра и магнитного поля форма эффективного потенциала изменяется, причем изменение, вызванное внешним электромагнитным полем является доминирующим. Исследование устойчивости движения заряженных частиц показывает, что внешнее магнитное поле сдвигает орбиты пробных частиц к источнику гравитационного поля в обоих случаях, в то время как НУТ параметр сдвигает их к источнику в случае однородного магнитного поля и в обратном направлении в случае присутствия токопроводящей петли вокруг компактного объекта.

4. Приведено точное вакуумное решение уравнений Максвелла в пространстве-времени медленно вращающейся намагниченной КН. Получены результаты по движению заряженных частиц и показана сильная зависимость движения частиц от форм параметра КН и величины магнитного поля.
5. Получены выражения для компонент дипольного магнитного поля в проводящей коре гравастара, которое может быть полезным для описания различных физических процессов внутри гравастара.
6. Изучены стационарные электромагнитные поля изолированной медленно вращающейся релятивистской компактной звезды на бране полагая, что магнитное поле заморожено в звездную кору из-за высокой проводимости среды, а также, эффекты бран параметра на звездное магнитное поле. Найдены точные аналитические внутренние решения уравнений Максвелла, а также, точные решения для внутреннего магнитного поля внутри звездного вещества с УС жесткого вещества.
7. Проведены численные расчеты, которые учитывают эффект напряженности брана на структуру электромагнитного поля вне вращающейся звезды и на конфигурации внутреннего магнитного поля в звездной среде с постоянной плотностью.
8. Получены точные значения для эффективного потенциала и радиуса СКО для различных значений параметров, характеризующих вакуумное решение уравнений поля в модели на бранах. Найдено точное выражение для нижней границы внутренней СКО пробной частицы в окрестности ЧД на бранах.
9. Приведены результаты исследований об извлечении энергии компактного гравитационного объекта, в частности, с помощью эффекта Блэндфорда-Знаека и процесса Пенроуза в пространстве Керр-Тауб-НУТ.
10. В бессиловом приближении найдено эволюционное уравнение для электромагнитного поля и решено с помощью метода последовательных приближений. Результаты свидетельствуют, что плазменная магнитосфера в окрестности вращающейся ЧД является устойчивой к возмущениям, что подтверждает эффективность процесса Блэндфорда-Знаека по извлечению энергии ЧД.

Литература

- [1] **Abdujabbarov A.A.**, Ahmedov B.J., and Kagramanova V.G. Particle motion and electromagnetic fields of rotating compact gravitating objects with gravitomagnetic charge // **Gen. Rel. Grav.** – 2008. – Vol. **40**. – P. 2515-2532.
- [2] **Abdujabbarov A.A.**, Ahmedov B.J. Electromagnetic Fields and Charged Particle Motion Around Magnetized Wormholes // **Astrophys. Space Sci.** – 2009. – Vol. **321**, – Issue 3–4. – P. 225-232.
- [3] Turimov B.V., Ahmedov B.J., and **Abdujabbarov A.A.** Electromagnetic Fields of Slowly Rotating Magnetized Gravastars // **Mod. Phys. Lett. A.** – 2009. – Vol. **24**, – No. 10. – P. 733-737.
- [4] **Абдужаббаров А.А.** Эффект Блэндфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ // **Доклады АН РУз.** – 2008. No. 6. – С. 27-30.
- [5] **Abdujabbarov A.A.**, Rakhmatov A.S., Turimov B.V. The Relation Between Maxwell Equations and Some Approximation of the Einstein Equations.// **Узбекский физический журнал.** – 2009. – No. 1. – С. 30-35.
- [6] **Abdujabbarov A.A.**, Mamadjanov A.I., Rakhmatov A.S. The Blandford-Znajek and Penrose Mechanisms in Plasma Magnetospheres in Kerr-Taub-NUT Spacetime // **Вестник НУУз.** – 2009. – No. 2. – С. 75-81.
- [7] **Абдужаббаров А.А.**, Рахматов А.С., Рафиева Э., Мамаджанов А.И. Движение частиц в окрестности компактных гравитационных объектов с НУТ параметром во внешнем магнитном поле // **Физика фанининг бугунги ривожига истъдодли ёшларнинг ўрни: Иктидорли талабалар**

ва ёш олимларнинг илмий-амалий конференцияси материаллари. – Тошкент: ЎзМУ, 4-5 июнь 2008. – С. 3-8.

- [8] Туримов Б.В., **Абдужаббаров А.А.**, Рахматов А.С. Электромагнитные поля и движение пробных частиц в гравитационном поле кротовых нор // Фундаментальные и прикладные проблемы современной физики: Материалы научно-практической конференции. – Ташкент: НУУз, 30-31 мая 2008. – С. 52-55.
- [9] **Абдужаббаров А.А.** Об извлечении энергии компактного гравитационного объекта. // Табиий фанларнинг долзарб муаммолари: Республика чш олимлар илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. – Самарканд, 14-15 сентябрь 2008. – С. 5-6.
- [10] Turimov B.V., **Abdujabbarov A.A.** Motion of the Charged Particles Around Wormholes // Табиий фанларнинг долзарб муаммолари: Республика ёш олимлар илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. – Самарканд, 14-15 сентябрь 2008. – С. 147-149.
- [11] **Абдужаббаров А.А.**, Мамаджанов А.И. Эффект Пенроуза в гравитационном поле компактного объекта с гравитомагнитным монополярным зарядом // II республиканская конференция молодых физиков Узбекистана: Тез. докл. – Ташкент, 25-26 ноября 2008. – С. 237-240.
- [12] **Abdujabbarov A.A.**, Ahmedov B.J. Charged Particle Motion Around Rotating Black Hole in Braneworld Immersed in Magnetic Field // gr-qc/0905.2730v1. – 2009. – P. 1-9.
- [13] Ginzburg V. L., Ozernoy L. M. On gravitational collapse of magnetic stars // Zh. Eksp. Teor. Fiz.– 1964.– V.47.– 1030-1040.
- [14] Wald R.M. Black hole in a uniform magnetic field // Phys. Rev. D. – 1974. – V. 10. – P. 1680-1685.
- [15] Aliev A.N., Özdemir N. Motion of charged particles around a rotating black hole in a magnetic field // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2002. – V. 336. – P. 241-248.

- [16] Dhurandhar S.V., Dadhich N. Energy-extraction processes from a Kerr black hole immersed in a magnetic field. I. Negative-energy states // Phys. Rev. D. – 1984 – V. **29**. – P. 2712-2720.
- [17] Petterson J.A. Stationary axisymmetric electromagnetic fields around a rotating black hole // Phys. Rev. D. – 1975. – V. **12**. – P. 2218-2225.
- [18] Chitre D.M., Vishveshwara C.V. Electromagnetic field of a current loop around a Kerr black hole // Phys. Rev. D. – 1975. – V. **12**. – P. 1538-1543.
- [19] Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. – М.: Наука.– 1986.– 328с.
- [20] Koide S., Shibata K., Kudoh T. Relativistic Jet Formation from black hole magnetized accretion disks: Method, tests, and applications of a general relativistic magnetohydrodynamic numerical code // Astrophys. J. – 1999. – V. **522**(2). – P. 727-752.
- [21] Boyer R.H., Lindquist R.W. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric // J. Math. Phys. – 1967. – V. **8**. – P. 265-281.
- [22] Newman E., Tamburino L., Unti T. Empty-space generalization of the Schwarzschild metric // J. Math. Phys. – 1963. – V. **4**. – P. 915-923.
- [23] Dadhich N., Turakulov Z.Ya. The most general axially symmetric electrovac spacetime admitting separable equations of motion // Class. Quantum Grav. – 2002. – V. **19**. – P. 2765-2775.
- [24] Coley A.A., Pelavas N., Zalaletdinov R. M. Cosmological Solutions in Macroscopic Gravity // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. **95**. – Iss. 15. – P. 151102.
- [25] Zalaletdinov R. The Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity // Int. Journ. Mod. Phys. A – 2008. – V. **23**. – Iss. 08. – P. 1173-1181.
- [26] Morris M. S., Thorne K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity // Am. J. Phys. – 1988. – V. **56**. – P. 395-412.

- [27] Kardashev N. S., Novikov I.D., Shatskii A.A. Astrophysics of wormholes // Int. J. Mod. Phys. D. – 2007. – V. **16**. – P. 909-926.
- [28] Visser M. Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking. – American Institute of Physics, Woodbury, 1995
- [29] Teo E. Rotating traversable wormholes // Phys.Rev. D. – 1998. – V. **58**. – P. 024014, 1-6.
- [30] Morris M. S., Thorne K. S., Yurtsever U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. **61**. – P. 1446-1449.
- [31] Visser M., Kar S., Dadhich N. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. **90**. P. 201102.
- [32] Dzhunushaliev V. Quantum wormhole as a Ricci flow // gr-qc/0809.0957v4. – 2008. – P. 1-9.
- [33] Carroll S. M. The Cosmological Constant // astro-ph/0004075. – 1999. – P. 1-50.
- [34] Peebles P. J. E., Ratra B. The cosmological constant and dark energy //Rev. Mod. Phys. – 2003. – V. **75**. – P. 559-606.
- [35] Linder E. V. Seeing darkness: the new cosmology // J. Phys. Conf. Ser. – 2006. – V. **39** – P. 56-62.
- [36] Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy //Int. J. Mod. Phys. D. – 2006. – V. **15**. – P. 1753-1935.
- [37] Mazur P.O., Mottola E. Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes // gr-qc/0109035. – 2001. – P. 1-4.
- [38] Mazur P.O., Mottola E. Gravitational vacuum condensate stars // Proc. Nat. Acad. Sci. – 2004. **101**(26). – P. 9545-9550.
- [39] Lobo F. S. N. Stable dark energy stars // Class. Quant. Grav. – 2006. – V. **23**. – P. 1525-1541.

- [40] Lobo F. S. N. Van der Waals quintessence stars // Phys. Rev. D. – 2007. – V. **75**. – P. 024023.
- [41] Lobo F. S. N., Arellano A. V. B. Gravastars supported by nonlinear electrodynamics // Class. Quant. Grav. – 2007. – V. **24**. – P. 1069-1088.
- [42] DeBenedictis A., Horvat D., Ilijic S., Kloster S., Viswanathan K. S. Gravastar solutions with continuous pressures and equation of state // Class. Quantum Grav. – 2006. – V. **23**. – P. 2303-2316.
- [43] Chirenti C. B. M. H., Rezzolla L. How to tell a gravastar from a black hole // Class. Quantum Grav. – 2007. – V. **24**. – P. 4191-4206.
- [44] Chirenti C. B. M. H., Rezzolla L. Ergoregion instability in rotating gravastars // Phys. Rev. D. – 2008. – V. **78**. – P. 084011.
- [45] Dadhich N. K., Maartens R., Papodopoulos P., Rezanian V. Black holes on the brane // Phys. Lett. B – 2000. – V. **487**. – 1-2.
- [46] Maartens R. Brane-world gravity // Living Rev. Relativity. – 2004. – V. **7**(7). – P. 1-58. (2004).
- [47] Majumdar A.S., Mukherjee N. Braneworld black holes in Cosmology and Astrophysics // Int. J. Mod. Phys. D. – 2005. – V. **14**. – P. 1095-1129.
- [48] Creek S., Gregory R., Kanti P., Mistry B. Braneworld stars and black holes // Class. Quantum Grav. – 2006. – V. **23**(23). – P. 6633-6657.
- [49] Germany C., Maartens R. Stars in the braneworld // Phys. Rev. D. – 2001. – V. **64**. – P. 124010.
- [50] Dzhunushaliev V., Folomeev V., Minamitsuji M. Thick de Sitter brane solutions in higher dimensions // Phys. Rev. D. – 2009. – V. **79**. – P. 024001.
- [51] Keeton C.R., Petters A.O. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. III. Braneworld gravity // Phys. Rev. D. – 2006. – V. **73**. – P. 104032.

- [52] Keeton C.R., Petters A.O. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects: Static, spherically symmetric case // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **72**. – P. 104006.
- [53] Keeton C.R., Petters A.O. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. II. Probing post-post-Newtonian metrics // *Phys. Rev. D.* – 2006. – V. **73**. – P. 044024.
- [54] Iorio L. On the effects of Dvali Gabadadze Porrati braneworld gravity on the orbital motion of a test particle // *Class. Quantum Grav.* – 2005. – V. **22**. – P. 5271-5281.
- [55] Aliev A. N., Gümrukçüoğlu A. E. Charged rotating black holes on a 3-brane // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **71**. – P. 104027.
- [56] da Rocha R., Coimbra-Araujo C.H. Physical Effects of Extra Dimension and Concomitant Map between Photons and Gravitons in Randall-Sundrum Brane-World Scenario // *PoS(IC2006)*. – 2006. – V. **065**. – P. 1-6.
- [57] Deutsch A.J. The Electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo // *Ann. Astrophys.* – 1955. – V. **1**. – P. 1-10.
- [58] Beskin V.S. General relativity effects on electrodynamic processes in radio pulsars // *Soviet Astron. Lett.* – 1990. V. **16**. – P. 286-289.
- [59] Muslimov A.G., Tsygan A.T. Influence of general relativity effects on electrodynamic processes in the vicinity of a magnetic pole of a neutron star // *Soviet Astr.* – 1990. – V. **34**. – P. 133-137.
- [60] Muslimov A.G., Tsygan A.T. General relativistic electric potential drops above pulsar polar caps // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1992. – V. **255**. – P. 61-70.
- [61] Konno K., Kojima Y. General relativistic modification of a pulsar electromagnetic field // *Prog. Theor. Phys.* – 2000. – V. **104**. – P. 1117-1127.
- [62] Rezzolla L., Ahmedov B.J., Miller J.C. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - I. Formulation of the

equations // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2001. – V. **322**. – P. 723-740. ;
Erratum – 2003 – V. **338**. – P. 816.

- [63] Rezzolla L., Ahmedov B.J. and Miller J.C. Stationary electromagnetic fields of slowly rotating magnetized neutron star in general relativity.// Found. Phys.– 2001.– V.**31**, No.7.– P.1051-1065.
- [64] Rezzolla L., Ahmedov B.J. Electromagnetic fields in the exterior of an oscillating relativistic star - I. General expressions and application to a rotating magnetic dipole // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2004. – V. **352**. – P. 1161-1179.
- [65] Bini D., Cherubini C., Janzen R.T., Mashhoon B. Gravitomagnetism in the Kerr-Newman-Taub-NUT spacetime // Class. Quantum Grav. – 2003. – V. **20**. – P. 457-468.
- [66] Carter B. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom // Phys. Rev. Lett. – 1971. – V. **26**. – P. 331-333.
- [67] Aliev A.N. Polar circular orbits in the spacetime of black holes // Class. Quantum Grav. – 1993. – V. **10**. – P. 1741-1749.
- [68] Aliev A.N. Rotating spacetimes with asymptotic nonflat structure and the gyromagnetic ratio // Phys. Rev. D. – 2008. – V. **77**. – P. 044038.
- [69] Prasanna A.R., Vishveshwara C.V. Charged particle motions in an electromagnetic field on Kerr background geometry // Pramana. – 1978. – V. **11**. – P. 359-377.
- [70] Prasanna A.R. General-relativistic analysis of charged-particle motion in electromagnetic fields surrounding black holes // Riv. Nuovo Cim. – 1980. – V. **3**. (N. 11). – P. 1-53.
- [71] Manko V.S., Ruiz E. Physical interpretation of the NUT family of solutions // Class. Quantum Grav. – 2005. – V. **22**. – P. 3555-3560.

- [72] Kagramanova V., Ahmedov B. On properties of vacuum axially symmetric spacetime of gravitomagnetic monopole in cylindrical coordinates // *Gen.Rel.Grav.* – 2006. – V. **38**. – P. 823-835.
- [73] Camenzind M. *Compact Objects in Astrophysics. White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes.* – Berlin.: Springer-Verlag, 2007. – 679 p.
- [74] Petterson J.A. Magnetic field of a current loop around a Schwarzschild black hole // *Phys.Rev. D.* – 1974. – V. **10**. – P. 3166-3170.
- [75] Hartle J.B. *Gravity. An Introduction to Einstein's General Relativity.* – Essex.: Pearson Education, Inc, 2003. – 602 p.
- [76] Messios, N., Papadopoulos, D.B., Stergioulas N. Torsional oscillations of magnetized relativistic stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2001. – V. **328**. – P. 1161-1168.
- [77] Anderson J.L., Cohen J.M. // *Gravitational collapse of magnetic neutron stars* *Astrophys. Space Science.* – 1970. – V. **9**. – P. 146-152.
- [78] Dadhich N., Kar S., Mukherjee S., Visser M.: $R=0$ spacetimes and self-dual Lorentzian wormholes // *Phys. Rev. D.* – 2002. – V. **65**. – P. 064004.
- [79] Kuhfittig P. K. F. Viable models of traversable wormholes supported by small amounts of exotic matter // *gr-qc/0806119v1.* – 2008.
- [80] Harko T., Kovács Z., Lobo F.S.N. Electromagnetic signatures of thin accretion disks in wormhole geometries // *Phys. Rev. D.* – 2008. – V. **78**. – P. 084005.
- [81] Lobo F. S. N. Phantom energy traversable wormholes // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **71**. – P. 084011.
- [82] Sushkov S. Wormholes supported by a phantom energy // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **71**. – P. 043520.
- [83] Lobo, F. S. N. Stability of phantom wormholes // *Phys. Rev. D.* – 2005. V. **71**. – P. 124022.

- [84] Böhmer C. G., Harko T., Lobo F.S.N. Wormhole geometries with conformal motions // *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. P. 075016.
- [85] Bergliaffa P., Hibberd K. E. On the stress-energy tensor of a rotating wormhole // *gr-qc/0006041*. – 2000. – P. 1-4.
- [86] Kashargin P. E. and Sushkov S. V. Slowly rotating scalar field wormholes: The second order approximation // *Phys. Rev. D.* – 2008. – V. **78**. – P. 064071.
- [87] Kim S.-W. Rotating wormhole and scalar perturbation // *Nuovo Cimento B.* – 2005. – V. **120**. – P. 1235-1242.
- [88] Jamil, M., Rashid M. Can a wormhole generate electromagnetic field? // *astro-ph/0805096v2* – 2008. – P. 1-8.
- [89] Kim S.-W., Lee H. Exact solutions of a charged wormhole // *Phys. Rev. D.* – 2001. – V. **63**. – P. 064014.
- [90] Duncan R.C. Global seismic oscillations in soft gamma repeaters // *Astrophys. J.* – 1998. – V. **498**. – P. L45.
- [91] Kardashev N.S., Novikov I.D., Shatskii A.A. Magnetic tunnels (wormholes) in astrophysics // *Astronomy Reports.* – 2006. – V. **50**. – P. 601-611.
- [92] Shatskii A.A. Passage of photons through wormholes and the influence of rotation on the amount of phantom matter around them// *Astronomy Reports.* – 2007. – V. **51**. – P. 81-86.
- [93] Новиков И. Д., Кардашев Н. С., Шацкий А. А. Многокомпонентная Вселенная и астрофизика кротовых нор // *УФН.* – 2007. N 177. – С. 1017-1023.
- [94] Rocha P., Chan R., da Silva M. F. A., Wang A. Stable and 'bounded excursion' gravastars, and black holes in Einstein's theory of gravity // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2008. – V. **11**. – P. 010.

- [95] Duncan R.C., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts // *Astrophys. J.* – 1992. – V. **392**. – P. L9-L13.
- [96] Thompson C., Duncan R.C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1995. – V. **275**. – P. 255-300.
- [97] Ruffini R., Treves A. On a magnetized rotating sphere // *Astrophys. Lett.* – 1973. – V. **13**. – P. 109-111.
- [98] Wasserman I., Shapiro S.L. Masses, radii, and magnetic fields of pulsating X-ray sources - Is the 'standard' model self-consistent // *Astrophys. J.* – 1983. – V. **265**. – P. 1036-1046.
- [99] Muslimov A., Harding A.K. Toward the quasi-steady state Electrodynamics of a neutron star // *Astrophys. J.* – 1997. – V. **485**. – P. 735-746.
- [100] Kojima Y., Matsunaga N., Okita T. Stationary electromagnetic fields in the exterior of a slowly rotating relativistic star: a description beyond the low-frequency approximation // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2004. – V. **348**(4). – P. 1388-1394.
- [101] Gupta A., Mishra A., Mishra H., Prasanna A.R. Rotating compact objects with magnetic fields // *Class. Quantum Grav.* – 1998. – V. **15**. – P. 3131-3145.
- [102] Prasanna A.R., Gupta A. Structure of external electromagnetic field around a slowly rotating compact object and charged-particle trajectories therein // *Nuovo Cimento B.* – 1997. – V. **112**(8). – P. 1089-1106.
- [103] Geppert U., Page D., Zannias T. Magnetic field decay in neutron stars: Analysis of general relativistic effects // *Phys. Rev. D.* – 2000. – V. **61**. – P. 123004.
- [104] Page D., Geppert U., Zannias T. General relativistic treatment of the thermal, magnetic and rotational evolution of isolated neutron stars with

- crustal magnetic fields // *Astron. Astrophys.* – 2000. – V. **360**. – P. 1052-1066.
- [105] Zanotti O., Rezzolla L. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - II. Solution of the induction equations // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2002. – V. **331**(2). – P. 376-388.
- [106] Keeton C.R., Petters A.O. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. II. Probing post-post-Newtonian metrics // *Phys. Rev. D.* – 2006. – V. **72**. – P. 104006.
- [107] Bozza V. Gravitational lensing in the strong field limit // *Phys. Rev. D.* – 2002. – V. **66**. – P. 103001.
- [108] Eiroa E. F. Braneworld black hole gravitational lens: Strong field limit analysis // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **71**. – P. 083010.
- [109] Whisker R. Strong gravitational lensing by braneworld black holes // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **71**. – P. 064004.
- [110] Pal S., Kar S. Gravitational lensing in braneworld gravity: formalism and applications // *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – P. 045003.
- [111] Böhmer C.G., Harko T., Lobo F. S. N. Solar system tests of brane world models // *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – P. 045015.
- [112] Kotrlová A., Stuchlik Z., Török G. Quasiperiodic oscillations in a strong gravitational field around neutron stars testing braneworld models // *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – P. 225016.
- [113] Pun C. S. J., Kovács Z., Harko T. Thin accretion disks onto brane world black holes // *Phys. Rev. D.* – 2008. – V. **78**. – P. 084015.
- [114] Hackmann E., Kagramanova V., Kunz J., Lämmerzahl C. Analytic solutions of the geodesic equation in higher dimensional static spherically symmetric spacetimes // *Phys. Rev. D.* – 2008. – V. **78**. – P. 124018.

- [115] Ahmedov B. J., Fattoyev F. J. Magnetic fields of spherical compact stars in a braneworld // Phys. Rev. D. – 2008. – V. **78**. – P. 047501.
- [116] Rezzolla L., Lamb F.K., Marcovic D., Shapiro S.L. Properties of r modes in rotating magnetic neutron stars. I. Kinematic secular effects and magnetic evolution equations // Phys. Rev. D. – 2001. – V. **64**. – P. 104013.
- [117] Baym G., Pethick C., Sutherland P. The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models // Astrophys. J. – 1971. – V. **170**. – P. 299-318.
- [118] Tolmann R.C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid // Phys. Rev. – 1939. V. **55**. – P. 364-373.
- [119] Oppenheimer J.R., Volkoff G.M. On massive neutron cores // Phys. Rev. – 1939. – V. **55**. – P. 374-381.
- [120] Glendenning, N. K. Compact Stars. –New York.: Springer-Verlag, 1996. – 390p.
- [121] Arfken G.B., Weber H.J. Mathematical Methods for Physicists, 5th edn. – San Diego.: Academic Press, 2001. – 1182 p.
- [122] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W. T. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (Fortran Version). – Cambridge University Press, 1989. – 963 p.
- [123] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.– М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 512 с.
- [124] Aliev A.N., Frolov V.P. Five-dimensional rotating black hole in a uniform magnetic field: The gyromagnetic ratio // Phys. Rev. D. – 2004. – V. **69**. – P. 084022.
- [125] Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. В 2-х т. – М.: Мир, 1986. – 355 с.

- [126] Шапиро С., Тьюкольски С. Черные дыры, белые карлики, нейтронные звезды. В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – 655 с.
- [127] Zakharov A.F. Particle capture cross sections for a Reissner-Nordström black hole // *Class. Quantum Grav.* – 1994. – V. **11**. – P. 1027-1033.
- [128] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. *Gravitation*. – San Francisco.: Freeman, 1973. – 1215 p.
- [129] Shafee R, McClintock J.E., Narayan R., Davis S.W., Li L.-X., Remillard R.A. Estimating the spin of stellar-mass black holes by spectral fitting of the X-ray continuum // *Astrophys. J.* – 2006. – V. **636**(2). – P. L113-L116.
- [130] Shafee R., Narayan R., McClintock J.E. Viscous torque and dissipation in the inner regions of a thin accretion disk: Implications for measuring black hole spin // *Astrophys. J.* – 2008. – V. **676**. – P. 549-561.
- [131] Rees M. J. *Astrophysical evidence for black holes.: Black Holes and Relativistic Stars*, ed. R. M. Wald. – Chicago.: Chicago University Press, 1998. – P. 79.
- [132] Blandford R. D., Znajek R. L. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1977. – V. **179**. – P. 433-456.
- [133] Punsly B., Coroniti F.V. Relativistic winds from pulsar and black hole magnetospheres // *Astrophys. J.* – 1990. – V. **350**. – P. 518-535.
- [134] Punsly B. Force-free waves and black hole magnetospheric causality // *Astrophys. J.* – 2003. – V. **583**(2). – P. 842-852
- [135] King A.R., Kundt W., Lasota J.P. Black holes and magnetic fields // *Phys. Rev. D.* – 1975. V. **12**, 3037-3042.
- [136] Karas V. Asymptotically uniform magnetic field near a Kerr black hole // *Phys. Rev. D.* – 1989. – V. **40**(6). – P. 2121-2123.
- [137] Levinson A. On Time Evolution and Causality of Force-free Black Hole Magnetospheres // *Astrophys. J.* – 2004. – V. **608**(1). – P. 411-417.

- [138] Punsly B. Fast-Wave Polarization, Charge Horizons, and the Time Evolution of Force-free Magnetospheres // *Astrophys. J.* – 2004. – V. **612**(1). – P. L41-L44.
- [139] Komissarov S.S. Direct numerical simulations of the Blandford-Znajek effect // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2001. – V. **326**(3). – P. L41-L44.
- [140] Komissarov S.S. Electrodynamics of black hole magnetospheres // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2004. – V. **350**(2). – P. 427-448.
- [141] Naito T., Kojima Ya. Magnetic field evolution with hall drift in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1994. V. **266**(3). – P. 597-608
- [142] Uzdensky D.A. Force-Free Magnetosphere of an Accretion Disk-Black Hole System. I. Schwarzschild Geometry // *Astrophys. J.* – 2004. – V. **603**(3). – P. 652-662.
- [143] Levinson A. Energy extraction from a Kerr black hole - An ultimate power source in the Universe?: Trends in black hole research. – New York, USA, 2006 – P.119
- [144] Beskin V. S. Kuznetsova I. V. On the Blandford-Znajek mechanism of the energy loss of a rotating black hole // *Nuovo Cimento B.* – 2000. – V. **115**(7-9). – P. 795-814.
- [145] Ahmedov B.J., Rakhmatov N.I. Concerning measurement of gravitomagnetism in electromagnetic systems // *Found. Phys.* – 2003. – V. **33**. – P. 625-639.
- [146] Gomez R., Laguna P., Papadopoulos P., Winicour J. Cauchy-characteristic evolution of Einstein-Klein-Gordon systems // *Phys. Rev. D.* – 1996. – V. **54**. – P. 4719-4727.
- [147] Poisson E. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics.* – Cambridge University Press, 2004. – 233 p.
- [148] Ghezzi C.R. Relativistic structure, stability, and gravitational collapse of charged neutron stars // *Phys. Rev. D.* – 2005. – V. **72**. – P. 104017.

Приложения

А. Определение постоянной C_1 с помощью условия электрической нейтральности источника

Чтобы найти постоянную C_1 в уравнении (1.5), можно использовать условие электрической нейтральности источника

$$4\pi Q = 0 = \frac{1}{2} \oint F^{\alpha\beta} *_d S_{\alpha\beta} =$$

$$C_1 \oint \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u_\alpha m^\beta \xi_{(t)}^\gamma(uk) dS + \frac{B}{2} \oint \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u_\alpha m^\beta \xi_{(\varphi)}^\gamma(uk) dS, \quad (\text{A.1})$$

оценивая величину интеграла по сферической поверхности в асимптотической бесконечности. Здесь было использовано равенство $\xi_{\beta;\alpha} = -x^i{}_{\alpha;\beta} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \xi_\gamma$, вытекающее из уравнения Киллинга, элемент произвольной 2-поверхности $dS^{\alpha\beta}$ представлен в виде [145]

$$dS^{\alpha\beta} = -u^\alpha \wedge m^\beta(uk) dS + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} u_\mu n_\nu \sqrt{1 + (uk)^2} dS. \quad (\text{A.2})$$

Также были использованы следующие выражения

$$m_\alpha = \frac{\eta_{\lambda\alpha\mu\nu} u^\lambda n^\mu k^\nu}{\sqrt{1 + (uk)^2}}, \quad n_\alpha = \frac{\eta_{\lambda\alpha\mu\nu} u^\lambda k^\mu m^\nu}{\sqrt{1 + (uk)^2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$k^\alpha = -(uk)u^\alpha + \sqrt{1 + (uk)^2} \eta^{\mu\alpha\rho\nu} u_\mu m_\rho n_\nu,$$

устанавливающие взаимосвязь между тремя $\{\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ векторами, n^α - нормальный вектор к 2-поверхности, пространственноподобный вектор m^α лежит на данной 2-поверхности и ортогонален к четыре-скорости u^α наблюдателя, единичный пространственноподобный четыре-вектор k^α лежит на поверхности и ортогонален к m^α , dS инвариантный элемент поверхности, \wedge

обозначает внешнее произведение, $*$ обозначает дуальный элемент, $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - псевдо-тензорное выражение символа Леви-Чивита $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Затем, поставляя $u_0 = -(1 - M/r)$, $m^1 = (1 - M/r)$, а также асимптотические значения символов Кристоффеля $\Gamma_{10}^0 = M/r^2$ и $\Gamma_{13}^0 = -J \sin^2 \theta / r^2 - l(1 - 2M/r) \cos \theta / r$ в выражение (А.1) для потока, можно получить значение постоянной $C_1 = aB$. Параметр l не проявляется в постоянной C_1 , поскольку интеграл $\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$ обращается в ноль.

В. Уравнения Максвелла в пространстве-времени компактного гравитационного объекта на бране

Общая форма первой пары общерелятивистских уравнений Максвелла дается выражением

$$3!F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 2(F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha}) = 0, \quad (\text{В.1})$$

где $F_{\alpha\beta}$ тензор электромагнитного поля.

Ковариантные компоненты электромагнитного тензора явным образом выражаются через компоненты электрического и магнитного поля следующим образом

$$F_{\alpha\beta} \equiv 2u_{[\alpha}E_{\beta]} + \eta_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\gamma B^\delta, \quad (\text{В.2})$$

где u^α 4-скорость наблюдателя, $T_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ псевдотензорное выражение для символов Леви-Чивита $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (\text{В.3})$$

где $g \equiv \det|g_{\alpha\beta}| = -A^2 H^2 r^4 \sin^2 \theta$.

Общая форма второй пары уравнений Максвелла дается выражением

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha \quad (\text{В.4})$$

где 4-ток J^α представляет собой сумму конвекционного тока и тока проводимости

$$J^\alpha = \rho_e w^\alpha + j^\alpha, \quad j^\alpha w_\alpha \equiv 0, \quad j_\alpha = \sigma F_{\alpha\beta} w^\beta, \quad (\text{B.5})$$

где σ электропроводность, а w^α 4-скорость проводящей среды как целого. Уравнение (B.4) может быть также переписано в форме, не содержащей ковариантное дифференцирование

$$(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta} = 4\pi\sqrt{-g}J^\alpha. \quad (\text{B.6})$$

4-скорость собственного неподвижного наблюдателя в метрике 3.2 выглядит следующим образом

$$(u^\alpha)_{\text{obs}} \equiv A^{-1}(1, 0, 0, 0); \quad (u_\alpha)_{\text{obs}} \equiv A\left(-1, 0, 0, -\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A^2}\right). \quad (\text{B.7})$$

Используя основные уравнения (B.1), (B.4) вместе с (B.2), (B.3) и (B.7), можно получить уравнения Максвелла для медленно вращающейся НЗ на бранах

$$(Hr^2 \sin \theta B^i)_{,i} - \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} E_r \right]_{,\theta} + \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} E_\theta \right]_{,r} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$(Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial B^r}{\partial t} + \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = A(E_{\theta,\varphi} - E_{\varphi,\theta}), \quad (\text{B.9})$$

$$(Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial B^\theta}{\partial t} - \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial E_r}{\partial t} = (E_\varphi A)_{,r} - A E_{r,\varphi}, \quad (\text{B.10})$$

$$(Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial B^\varphi}{\partial t} = -(E_\theta A)_{,r} + A E_{r,\theta}. \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} (Hr^2 \sin \theta E^i)_{,i} - \left[\frac{\tilde{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A} B_\theta \right]_{,r} \\ + \left[\frac{\tilde{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A} B_r \right]_{,\theta} = 4\pi A H r^2 \sin \theta J^0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} A (B_{\varphi,\theta} - B_{\theta,\varphi}) = (Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial E^r}{\partial t} \\ - \left[\frac{\tilde{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial B_\theta}{\partial t} + 4\pi A H r^2 \sin \theta J^r, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} A B_{r,\varphi} - (A B_\varphi)_{,r} = (Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial E^\theta}{\partial t} \\ + \left[\frac{\tilde{\omega} r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial B_r}{\partial t} + 4\pi A H r^2 \sin \theta J^\theta, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$(A B_\theta)_{,r} - A B_{r,\theta} = (Hr^2 \sin \theta) \frac{\partial E^\varphi}{\partial t} + 4\pi A H r^2 \sin \theta J^\varphi. \quad (\text{B.15})$$

Для того, чтобы получить физические компоненты величин, необходимо спроектировать электромагнитное поле на соответствующим образом выбранный тетрад. Ортонормальный тетрад представляет собой набор четырех взаимно ортогональных единичных векторов в каждой точке выбранного пространства-времени, который указывает направления четырех осей локально минковской системы координат. Ортонормальный тетрад выбранной нами метрики $\{\mathbf{e}_{\hat{\mu}}\} = (\mathbf{e}_{\hat{0}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}})$ соответствующий собственному наблюдателю (B.7) может быть выбран в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{0}}^\alpha = A^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0, 0, \tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}}^\alpha = H^{-1} \begin{pmatrix} 0, 1, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}}^\alpha = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0, 0, 1, 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}^\alpha = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

1-формы $\{\omega^{\hat{\mu}}\} = (\omega^{\hat{0}}, \omega^{\hat{r}}, \omega^{\hat{\theta}}, \omega^{\hat{\varphi}})$, соответствующие векторам тетрада, имеют в свою очередь следующие компоненты

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{0}} = A \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}} = H \begin{pmatrix} 0, 1, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\theta}} = r \begin{pmatrix} 0, 0, 1, 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\varphi}} = r \sin \theta \begin{pmatrix} -\tilde{\omega}, 0, 0, 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Теперь мы можем переписать уравнения Максвелла (B.8)–(B.11) и (B.12)–(B.15) в ортонормальной системе координат, проектируя уравнения (B.1) и

(B.4) на компоненты (B.16) и (B.17):

$$\begin{aligned} & \sin \theta (r^2 B^{\hat{r}})_{,r} + Hr (\sin \theta B^{\hat{\theta}})_{,\theta} + Hr B^{\hat{\varphi}}_{,\varphi} \\ & - \left[\frac{H\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} E^{\hat{r}} \right]_{,\theta} + \left[\frac{\tilde{\omega}r^3 \sin^2 \theta}{A} E^{\hat{\theta}} \right]_{,r} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$(r \sin \theta) \frac{\partial B^{\hat{r}}}{\partial t} + \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial E^{\hat{\theta}}}{\partial t} = A \left[E^{\hat{\theta}}_{,\varphi} - (\sin \theta E^{\hat{\varphi}})_{,\theta} \right], \quad (\text{B.19})$$

$$(Hr \sin \theta) \frac{\partial B^{\hat{\theta}}}{\partial t} - \left[\frac{H\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial E^{\hat{r}}}{\partial t} = -A H E^{\hat{r}}_{,\varphi} + \sin \theta (r A E^{\hat{\varphi}})_{,r}, \quad (\text{B.20})$$

$$(Hr) \frac{\partial B^{\hat{\varphi}}}{\partial t} = - (r A E^{\hat{\theta}})_{,r} + A H E^{\hat{r}}_{,\theta} \quad (\text{B.21})$$

и

$$\begin{aligned} & \sin \theta (r^2 E^{\hat{r}})_{,r} + Hr (\sin \theta E^{\hat{\theta}})_{,\theta} + Hr E^{\hat{\varphi}}_{,\varphi} - \left[\frac{\tilde{\omega}r^3 \sin^2 \theta}{A} B^{\hat{\theta}} \right]_{,r} \\ & + \left[\frac{H\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} B^{\hat{r}} \right]_{,\theta} = 4\pi H r^2 \sin \theta J^{\hat{t}}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} & A \left[(\sin \theta B^{\hat{\varphi}})_{,\theta} - B^{\hat{\theta}}_{,\varphi} \right] = \\ & (r \sin \theta) \frac{\partial E^{\hat{r}}}{\partial t} - \left[\frac{\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial B^{\hat{\theta}}}{\partial t} + 4\pi A r \sin \theta J^{\hat{r}}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} & A H B^{\hat{r}}_{,\varphi} - \sin \theta (r A B^{\hat{\varphi}})_{,r} = \\ & (Hr \sin \theta) \frac{\partial E^{\hat{\theta}}}{\partial t} + \left[\frac{H\tilde{\omega}r^2 \sin^2 \theta}{A} \right] \frac{\partial B^{\hat{r}}}{\partial t} + 4\pi A H r \sin \theta J^{\hat{\theta}}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$(Ar B^{\hat{\theta}})_{,r} - A H B^{\hat{r}}_{,\theta} = (Hr) \frac{\partial E^{\hat{\varphi}}}{\partial t} + 4\pi A H r J^{\hat{\varphi}}. \quad (\text{B.25})$$

С. Доказательство непрерывности решений уравнений Эйнштейна на границе звезды

Докажем, что внутреннее решение для гравитационного поля совпадает с внешним решением на звездной поверхности. Для этого возьмем произвольную гиперповерхность Σ и убедимся в том, что непрерывность метрики и ее производных на этой гиперповерхности удовлетворена. Для того, чтобы различать решения, мы обозначим их индексами "ex" и "in" для внешних и внутренних решений, соответственно, так что

$$ds_{in,ex}^2 = -A_{in,ex}^2 dt_{in,ex}^2 + H_{in,ex}^2 dr_{in,ex}^2 + r_{in,ex}^2 d\theta_{in,ex}^2 + r_{in,ex}^2 \sin^2 \theta_{in,ex} d\varphi_{in,ex}^2, \quad (C.1)$$

где метрические функции $A_{in,ex}$, $H_{in,ex}$ являются только функциями радиальных координат.

Непрерывность метрической функции может быть установлена с помощью условий для касательного вектора $v^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ на гиперповерхности Σ :

$$(v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta})_{ex} = (v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta})_{in} \quad (C.2)$$

и граничной поверхности $(q^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta})_{ex} = (q^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta})_{in}$, где $q_{\alpha\beta}$ - метрика единичной сферы, а τ является собственным временем вдоль гиперповерхности Σ [146].

Из условия сферической симметрии звезды $d\Omega_{in} \equiv d\theta_{in}^2 + \sin^2 \theta_{in} d\varphi_{in}^2 = d\Omega_{ex}$ (поскольку звездное магнитное поле является пробным, всякое отклонение от сферичности звезды игнорируется), можно получить $r_{in} = r_{ex} = r$. Теперь уравнение (C.2) может быть переписано как

$$-A_{ex}^2 \dot{t}_{ex}^2 + H_{ex}^2 \dot{r}^2 = -A_{in}^2 \dot{t}_{in}^2 + H_{in}^2 \dot{r}^2, \quad (C.3)$$

где точка сверху означает производную по τ . Теперь, предполагая, что поверхность не перемещается в координатном пространстве ($\dot{r} = 0$), а координатное время соответствует гиперповерхности Σ ($t_{ex} = t_{in}$), с помощью внешних решений для A , H можно найти условия непрерывности метрики на гиперповерхности

$$A_{in}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right). \quad (C.4)$$

Поскольку для Σ мы имеем $ds_{ex|\Sigma}^2 = ds_{in|\Sigma}^2$, можно легко увидеть, что это условие удовлетворено. Таким образом, внешняя и внутренняя метрика совпадают.

Доказательство непрерывности производных метрического тензора вдоль гиперповерхности требует более длительных расчетов и устанавливается из непрерывности внешнего тензора кривизны [147]

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}, \quad (\text{C.5})$$

где n^α - единичный вектор нормали к Σ , x^α - координаты пространства-времени и $y^a = (\tau, \theta, \varphi)$ - координаты на Σ . Подробнее об этом можно найти в [148], где также показано, что условие $(K_{ab})_{ex} = (K_{ab})_{in}$ приводит к уравнениям движения, и тем самым завершается доказательство непрерывности решений уравнения Эйнштейна на границе звезды.

Д. Уравнения Максвелла и бессилевое условие в пространстве - времени компактного гравитационного объекта

Уравнения Максвелла в пространстве сферически-симметричного гравитирующего объекта имеет вид

$$N \sin \theta (r^2 B^{\hat{r}})_{,r} + r (\sin \theta B^{\hat{\theta}})_{,\theta} + r B^{\hat{\varphi}}_{,\varphi} = 0, \quad (D.1)$$

$$(r \sin \theta) \frac{\partial B^{\hat{r}}}{\partial t} = N \left[E^{\hat{\theta}}_{,\varphi} - (\sin \theta E^{\hat{\varphi}})_{,\theta} \right] - (\omega r \sin \theta) B^{\hat{r}}_{,\varphi}, \quad (D.2)$$

$$\left(\frac{r \sin \theta}{N} \right) \frac{\partial B^{\hat{\theta}}}{\partial t} = -E^{\hat{r}}_{,\varphi} + \sin \theta (r N E^{\hat{\varphi}})_{,r} - \left(\frac{\omega r \sin \theta}{N} \right) B^{\hat{\theta}}_{,\varphi}, \quad (D.3)$$

$$\left(\frac{r}{N} \right) \frac{\partial B^{\hat{\varphi}}}{\partial t} = - (r N E^{\hat{\theta}})_{,r} + E^{\hat{r}}_{,\theta} + \sin \theta (\omega r^2 B^{\hat{r}})_{,r} + \frac{\omega r}{N} (\sin \theta B^{\hat{\theta}})_{,\theta} \quad (D.4)$$

и

$$N \sin \theta (r^2 E^{\hat{r}})_{,r} + r (\sin \theta E^{\hat{\theta}})_{,\theta} + r E^{\hat{\varphi}}_{,\varphi} = 4\pi r^2 \sin \theta J^{\hat{t}}, \quad (D.5)$$

$$N \left[(\sin \theta B^{\hat{\varphi}})_{,\theta} - B^{\hat{\theta}}_{,\varphi} \right] - (\omega r \sin \theta) E^{\hat{r}}_{,\varphi} = \\ (r \sin \theta) \frac{\partial E^{\hat{r}}}{\partial t} + 4\pi N r \sin \theta J^{\hat{r}}, \quad (D.6)$$

$$B^{\hat{r}}_{,\varphi} - \sin \theta (r N B^{\hat{\varphi}})_{,r} - \left(\frac{\omega r \sin \theta}{N} \right) E^{\hat{\theta}}_{,\varphi} = \\ \left(\frac{r \sin \theta}{N} \right) \frac{\partial E^{\hat{\theta}}}{\partial t} + 4\pi r \sin \theta J^{\hat{\theta}}, \quad (D.7)$$

$$\left(N r B^{\hat{\theta}} \right)_{,r} - B^{\hat{r}}_{,\theta} + \sin \theta (\omega r^2 E^{\hat{r}})_{,r} + \frac{\omega r}{N} (\sin \theta E^{\hat{\theta}})_{,\theta} = \\ \left(\frac{r}{N} \right) \frac{\partial E^{\hat{\varphi}}}{\partial t} + 4\pi r J^{\hat{\varphi}} + \frac{4\pi \omega r^2 \sin \theta}{N} J^{\hat{t}}, \quad (D.8)$$

где $N = 1 - 2M/r$ - функция течения, а $\omega(r)$ может интерпретироваться как угловая скорость свободно падающей ИСО, также называемая угловой скоростью Лензе-Тирринга.

Бессиловое условие для магнитного поля имеет вид:

$$NE^{\hat{r}} J^{\hat{r}} + NE^{\hat{\theta}} J^{\hat{\theta}} - \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_t A_\varphi) \left(J^{\hat{\varphi}} + \frac{\omega r \sin \theta}{N} J^{\hat{t}} \right) = 0, \quad (\text{D.9})$$

$$N^{-1} (\partial_t A_\varphi) J^{\hat{t}} + (\partial_r A_\varphi) N J^{\hat{r}} + \frac{1}{r} (\partial_\theta A_\varphi) J^{\hat{\theta}} = 0, \quad (\text{D.10})$$

$$N^{-1} E^{\hat{r}} J^{\hat{t}} + \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_r A_\varphi) \left(J^{\hat{\varphi}} + \frac{\omega r \sin \theta}{N} J^{\hat{t}} \right) + \frac{1}{N} B^{\hat{\varphi}} J^{\hat{\theta}} = 0, \quad (\text{D.11})$$

$$r E^{\hat{\theta}} J^{\hat{t}} + \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta A_\varphi) \left(J^{\hat{\varphi}} + \frac{\omega r \sin \theta}{N} J^{\hat{t}} \right) + r B^{\hat{\varphi}} J^{\hat{r}} = 0 \quad (\text{D.12})$$